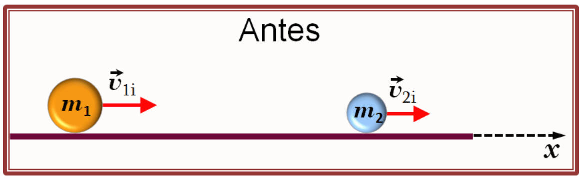
Colisões Elásticas Unidimensionais ($\vec{F}^{ext}_{res} = 0$)



Para que haja colisão: $v_{1i} > v_{2i}$

$$\begin{cases} \text{Colisão} \Rightarrow \text{Conservação do momento:} \quad P_i = P_f \;\Rightarrow\; p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} & (1) \\ \text{Elástica} \Rightarrow \text{Conservação da energia cinética: } E_c^i = E_c^f \;\Rightarrow\; \dfrac{p_{1i}^2}{2m_1} + \dfrac{p_{2i}^2}{2m_2} = \dfrac{p_{1f}^2}{2m_1} + \dfrac{p_{2f}^2}{2m_2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Da equação (1)} \;\Rightarrow\; p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} & (3) \\ \text{Da equação (2)} \;\Rightarrow\; \dfrac{p_{2f}^2 - p_{2i}^2}{m_2} = \dfrac{p_{1i}^2 - p_{1f}^2}{m_1} \;\Rightarrow\; p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \dfrac{m_2}{m_1}\left(p_{1i}^2 - p_{1f}^2\right) & (4) \end{cases}$$

Utilizando $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ e definindo $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$, podemos re-escrever a equação (4):

$$\left(p_{2f} - p_{2i}\right)\left(p_{2f} + p_{2i}\right) = \lambda\left(p_{1i} - p_{1f}\right)\left(p_{1i} + p_{1f}\right) \qquad (5)$$

Dividindo a equação (5) pela equação (3) encontramos uma relação entre os momentos inicial e final da partícula de massa m_2 e os momentos inicial e final da partícula de massa m_1:

$$\left(p_{2f} + p_{2i}\right) = \lambda\left(p_{1i} + p_{1f}\right) \qquad (6)$$

Observação: da equação (6) podemos escrever uma relação entre as velocidades das partículas, encontrando que $(v_{2f} + v_{2i}) = (v_{1i} + v_{1f}) \Longrightarrow (v_{2f} - v_{1f}) = -(v_{2i} - v_{1i})$, mostrando que a velocidade relativa entre as partículas do sistema inverte de sinal (inverte de sentido), o que é esperado quando temos uma colisão elástica.

Utilizando as equações (3) e (6) podemos construir um sistemas de duas equações:

$$\begin{cases} p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} & \text{(I)} \\ \left(p_{2f} + p_{2i}\right) = \lambda\left(p_{1i} + p_{1f}\right) & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II) temos

$$2p_{2f} = (\lambda + 1)\, p_{1i} + (\lambda - 1)\, p_{1f} \tag{III}$$

Substituindo na equação (III) a expressão para p_{1f} obtida da equação (I) e depois utilizando a equação (I) de novo, obtemos uma relação entre os momentos lineares finais das partículas de massa m_2 e m_1 em função dos momentos lineares inciais das duas partículas do sistema:

$$\begin{cases} p_{2f} = \dfrac{2\lambda}{(1+\lambda)}\, p_{1i} - \dfrac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)}\, p_{2i} \\[2ex] p_{1f} = \dfrac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)}\, p_{1i} + \dfrac{2}{(1+\lambda)}\, p_{2i} \end{cases}$$

Casos Particulares

1. Massas Iguais: $m_1 = m_2 = m \Longrightarrow \lambda = 1$

$$\begin{cases} p_{2f} = p_{1i} \Rightarrow v_{2f} = v_{1i} \\[2ex] p_{1f} = p_{2i} \Rightarrow v_{1f} = v_{2i} \end{cases}$$

2. Alvo em repouso: $p_{2i} = v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} p_{2f} = \dfrac{2\lambda}{(1+\lambda)}\, p_{1i} \\[2ex] p_{1f} = \dfrac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)}\, p_{1i} \end{cases}$$

Continuação na pág. 69 da apostila