

Eletrromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 21

1 Exemplo 4.8 - Livro Texto

Primeiro devemos notar que a densidade superficial de polarização σ_p induzida na superfície dielétrica deverá ter sinal oposto ao da carga q . Pela definição, temos que

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Neste caso, como $\hat{n} = \hat{z}$ e como $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, encontramos

$$\sigma_p = -\epsilon_0 \chi_e E_z$$

onde E_z é o campo elétrico no interior do dielétrico em $z = 0$.

O campo elétrico E_z é devido, em parte, pela carga q e em parte por σ_p , isto é, além do campo elétrico induzido pela carga q uma outra contribuição devido a σ_p deverá aparecer. Primeiro, vamos calcular o campo produzido pela carga a , pela lei de Coulomb:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

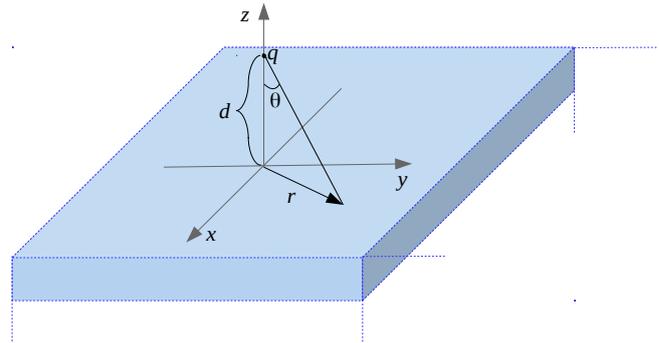
A contribuição de σ_p para o campo elétrico no dielétrico vem do fato de que a sua superfície infinita produz um campo elétrico, em módulo, do tipo:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0},$$

e que é facilmente calculado aplicando as condições de contorno na superfície do dielétrico (o que já foi feito em aulas passadas).

Substituindo estes campos na formula para σ_p que escrevemos, encontramos:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= -\epsilon_0 \chi_e \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right] \\ \therefore \sigma_p &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



e, portanto, a carga total de polarização é:

$$q_p = \left[\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right]$$

Agora devemos calcular o campo produzido por σ_p afim de calcular a força em q , para isso devemos resolver a integral:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma_p(\vec{r}') dS$$

Pela figura, vemos que

$$\vec{r} = d\hat{e}_z \quad \vec{r}' = a\hat{e}_r = a(\cos\phi\hat{e}_x + \text{sen}\phi\hat{e}_y) \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{d^2 + r'^2}$$

e a integral fica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{e}_z - a(\cos\phi\hat{e}_x + \text{sen}\phi\hat{e}_y)}{d^2 + r'^2} \left[-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(r'^2 + d^2)^{3/2}} \right] r' dr' d\phi$$

As integrais em $\text{sen}\phi$ e $\cos\phi$ se anulam

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} qd^2 \hat{e}_z \int_0^\infty \frac{r'}{(d^2 + r'^2)^3} dr'$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \frac{q}{d^2} \hat{e}_z$$

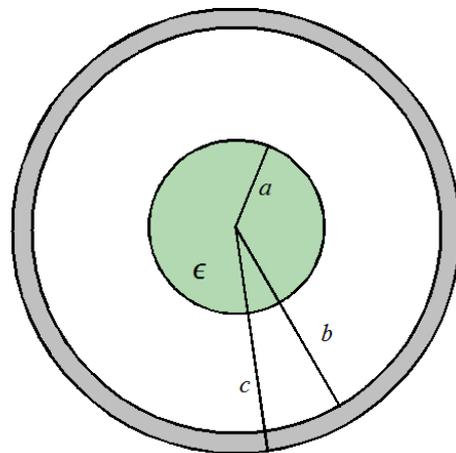
Finalmente, encontramos que aforça exercida na partícula é

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{q^2}{d^2} \hat{e}_z$$

2 Uma esfera dielétrica, de raio a e constante dielétrica K , está carregada com uma densidade volumétrica de cargas livres dada por

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right)$$

onde ρ_0 é uma constante. Concêntrica com a esfera há uma concha metálica condutora de raio interno $r = b$ e raio externo $r = c$.



A. Obtenha a expressão para a carga total acu-

mulada na esfera interna, em função do raio,

$$q(r) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3} \left(1 - \frac{3r}{4a}\right)$$

B. Utilize o argumento físico correto para justificar o cálculo de \vec{D} através da integral

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q_{livre}$$

e mostre que

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3} \left(1 - \frac{3r}{4a}\right) \hat{e}_r; & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{12r^2} \hat{e}_r; & a < r < b \\ 0; & b < r < c \\ \frac{\rho_0 a^3}{12r^2} \hat{e}_r; & b < r \end{cases}$$

C. Mostre que as densidades de carga superficial na superfície interna e externa da concha condutora são

$$\sigma_b = -\frac{\rho_0 a^3}{12b^2}; \quad r = b$$

e

$$\sigma_c = \frac{\rho_0 a^3}{12c^2}; \quad r = c$$

D. Considerando que $\epsilon = \text{constante}$, mostre que a densidade volumétrica de cargas de polarização é

$$\rho_p = -\frac{K-1}{K} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

E. Mostre que a densidade superficial de cargas de polarização na superfície da esfera dielétrica é

$$\sigma_p = \frac{K-1}{K} \frac{\rho_0 a}{12}$$

Solução

A.

$$q(r) = \int_V d\tau \rho(r) = \int_0^r r'^2 dr' \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(1 - \frac{3r'}{4a}\right)$$

B. \vec{D} é simetricamente esférico em todo espaço, note que \vec{D} é perpendicular a interface dielétrica-vácuo.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$$

$r < a$:

$$4\pi r^2 D = \frac{4\pi \rho_0 r^3}{3} \left(1 - \frac{3r}{4a}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \frac{\rho_0 r}{3} \left(1 - \frac{3r}{4a}\right) \hat{e}_r}$$

$a < r < b$:

$$4\pi r^2 D = \frac{4\pi \rho_0 r^3}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \frac{\rho_0 a^3}{12r^2} \hat{e}_r}$$

$b < r < c$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Esta região está no interior do condutor,} \\ \text{portanto o campo eletrostático deve ser nulo} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{D} = 0}$$

$c < r$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A carga livre no interior da superfície é igual} \\ \text{a de } \underline{a < r < b}, \text{ portanto o campo deve ser o mesmo} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{\rho_0 a^3}{12r^2} \hat{e}_r}$$

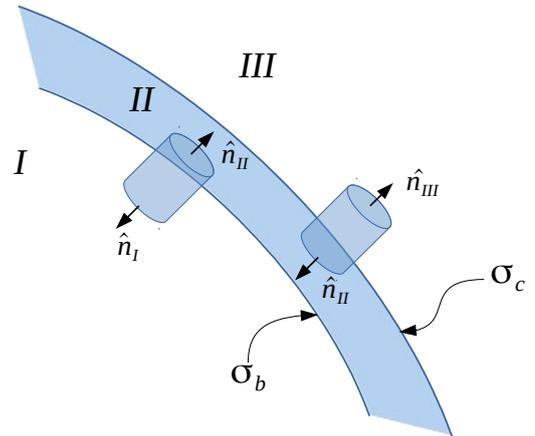
C. Condições de Contorno

$r = b$:

$$E_{II} - E_I = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_b = -\frac{\rho_0 \epsilon_0 a^3}{12b^2}}$$

$r = c$:

$$E_{III} - E_{II} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_c = \frac{\rho_0 \epsilon_0 a^3}{12c^2}}$$



D. $\epsilon = cte$

$$\therefore \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\vec{D} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \epsilon \vec{E} \right) = -\nabla \cdot \left(\vec{D} - \frac{\vec{D}}{K} \right) = -\rho \left(\frac{K-1}{K} \right)$$

$$\therefore \boxed{\rho_p = -\frac{K-1}{K} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right)}$$

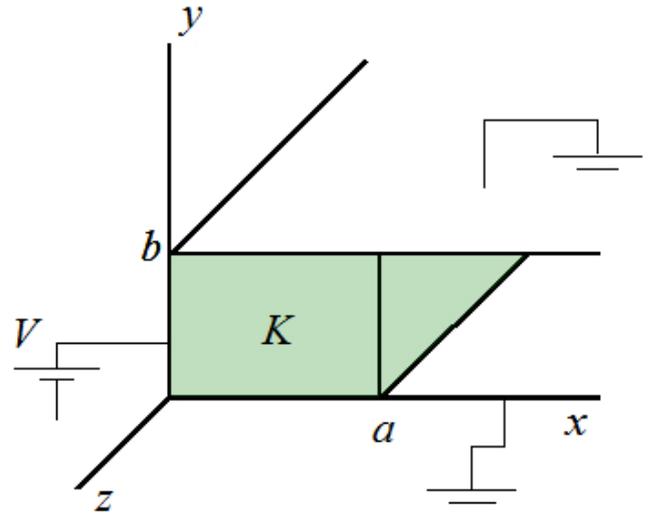
E.

$$\sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P};$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K = 1 + \chi \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \frac{K-1}{K} \vec{D}$$

$$\boxed{\sigma_p = \frac{K-1}{K} \frac{\rho_0 a}{12}}$$

3 Neste problema, vamos resolver a Equação de Laplace na presença de um dielétrico. Considere a calha mostrada na figura. A placa condutora mostrada na figura. A placa condutora em $x = 0$ está polarizada com uma tensão V . Na sua frente há uma fatia dielétrica de espessura a . As duas placas condutoras em $y = 0$ e $y = b$ estão aterradas.



A. Mostre que a solução geral da equação de Laplace no espaço entre as placas é dada por

$$\phi(x, y) = [Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}][C \sin(\alpha y) + D \cos(\alpha y)]$$

B. Aplique as condições de contorno em $y = 0$ e $y = b$ e mostre que

$$D = 0; \quad \alpha = \frac{m\pi}{b}; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

de forma que a solução geral fica

$$\phi(x, y) = \sum_m [A_m e^{-\frac{m\pi x}{b}} + B_m e^{\frac{m\pi x}{b}}] \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (1)$$

C. Considere agora a região dentro do dielétrico, que vamos denominar região I. Representando os coeficientes nesta região por A_m^I e B_m^I , mostre que a aplicação da condição de contorno

$$\phi_I(0, y) = V$$

implica em que

$$\begin{aligned} A_m^I + B_m^I &= \frac{4V}{m\pi}; & m \text{ ímpar} \\ A_m^I + B_m^I &= 0; & m \text{ par} \end{aligned}$$

D. Denominando a região fora do dielétrico, $x > a$, região II, mostre que, levando em conta a condição de contorno apropriada para $x \rightarrow \infty$, que

$$\phi_{II}(x, y) = \sum_m A_m^{II} e^{-\frac{m\pi x}{b}} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

E. Aplique as condições de contorno para \vec{E} e \vec{D} na interface do dielétrico, $x = a$, utilizando $\vec{E} = -\nabla\phi$ e $\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}$, e obtenha as seguintes relações entre os coeficientes das soluções para o poten-

cial nas duas regiões

$$\begin{aligned} A_m^I e^{-\frac{m\pi a}{b}} + B_m^I e^{\frac{m\pi a}{b}} &= A_m^{II} e^{-\frac{m\pi a}{b}} \\ -A_m^I e^{-\frac{m\pi a}{b}} + B_m^I e^{\frac{m\pi a}{b}} &= -\frac{1}{K} A_m^{II} e^{-\frac{m\pi a}{b}} \end{aligned}$$

F. Resolva estas equações e obtenha as expressões

$$A_m^I = B_m^I = 0; \quad m \text{ par}$$

$$A_m^I = \frac{K+1}{2K} A_m^{II}; \quad B_m^I = \frac{K-1}{2K} e^{-\frac{2m\pi a}{b}} A_m^{II}; \quad m \text{ ímpar}$$

$$A_m^I = \frac{4K e^{\frac{m\pi a}{b}}}{m\pi [K \cosh(\frac{m\pi a}{b}) + \sinh(\frac{m\pi a}{b})]} V; \quad m \text{ ímpar} \quad (2)$$

G. Obtenha a expressão para o vetor polarização \vec{P} dentro do dielétrico.

H. Obtenha as expressões para as cargas superficiais de polarização σ_p nas faces da fatia dielétrica em $x = 0$ e $x = a$.

Solução:

A. $\phi = X(x)Y(y)$

$$\frac{\nabla^2 \phi}{XY} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2 = cte$$

$$\therefore \boxed{\phi = (Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x})(C \sen(\alpha y) + D \cos(\alpha y))}$$

B. Em $y = 0$ ou $y = b \rightarrow V = 0$

$$0 = (Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x})(C \sen(\alpha 0) + D \cos(\alpha 0)) \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$0 = (Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x})(C \sen(\alpha b)) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{b}$$

$$\therefore \boxed{\phi(x, y) = \sum_n (A_n e^{-n\pi x/b} + B_n e^{n\pi x/b}) \sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$$

C. Para $x=0$: $\phi(0, y) = V$:

$$V = \sum_n (A_n + B_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Encontrando os coeficientes de Fourier:

$$\int_0^b V \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = \sum_n \int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

$$\therefore A_n + B_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4V}{\pi n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

D. Como $|\phi| < \infty$, isto é, finito, para $x \rightarrow \infty$, devemos tomar $B_n^{II} = 0$

$$\therefore \phi_{II}(x, y) = \sum_n A_n^{II} e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\alpha x)$$

E.

$$E_I = -\frac{\partial \phi_I}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \hat{e}_y = -\sum_n \frac{n\pi}{b} \left(-A_n^I e^{-n\pi x/b} + B_n^I e^{n\pi x/b} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_x$$

$$-\sum_n \frac{n\pi}{b} \left(A_n^I e^{-n\pi x/b} + B_n^I e^{n\pi x/b} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_y$$

$$E_{II} = -\frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \hat{e}_y = -\sum_n \frac{n\pi}{b} \left(-A_n^{II} e^{-n\pi x/b} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_x$$

$$-\sum_n \frac{n\pi}{b} \left(A_n^{II} e^{-n\pi x/b} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_y$$

Em $x = a$ e com as condições de contorno, uma vez que a superfície não contém cargas livres:

$$D_n^I = D_n^{II} \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 K E_I = \epsilon_0 E_{II}$$

$$E_t^I = E_t^{II}$$

encontramos

$$D_n^I = D_n^{II} \quad \rightarrow \quad K \left(-A_n^I e^{-n\pi a/b} + B_n^I e^{n\pi a/b} \right) = -A_n^{II} e^{-n\pi a/b} \quad (3)$$

$$E_t^I = E_t^{II} \quad \rightarrow \quad A_n^I e^{-n\pi a/b} + B_n^I e^{n\pi a/b} = A_n^{II} e^{-n\pi a/b} \quad (4)$$

$$E_t^I = E_t^{II} \quad \rightarrow \quad A_n^I e^{-n\pi a/b} + B_n^I e^{n\pi a/b} = A_n^{II} e^{-n\pi a/b} \quad (5)$$

F. Somando Eq.(1) com Eq.(2), encontramos:

$$-\cancel{A_n^I e^{-n\pi a/b}} + B_n^I e^{n\pi a/b} + \cancel{A_n^I e^{-n\pi a/b}} + B_n^I e^{n\pi a/b} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) A_n^{II} e^{-n\pi a/b} \quad \rightarrow \quad \boxed{B_n^I = \frac{K-1}{2K} e^{-2m\pi a/b} A_n^{II}}$$

Subtraindo Eq.(1) com Eq.(2), encontramos:

$$-\cancel{B_n^I e^{n\pi a/b}} + A_n^I e^{-n\pi a/b} + \cancel{B_n^I e^{n\pi a/b}} + A_n^I e^{-n\pi a/b} = \left(1 + \frac{1}{K}\right) A_n^{II} e^{-n\pi a/b} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_n^I = \frac{K+1}{2K} A_n^{II}}$$

Para m par:

$$A_n^I + B_n^I = \left(\frac{K+1}{2K} e^{-2m\pi a/b} + \frac{K-1}{2K} \right) A_n^{II} = 0 \quad \rightarrow \quad A_n^{II} = A_n^I = B_n^I = 0$$

Para m ímpar:

$$\frac{4V}{\pi n} = \frac{(K-1)e^{-2m\pi a/b} + K+1}{2K} A_n^{II} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_n^{II} = \frac{4Ke^{m\pi a/b}}{K \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) + \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} V}$$

G. No problema anterior, encontramos

$$\vec{P} = \frac{K-1}{K} \vec{D} = -\epsilon_0(K-1)\vec{E},$$

e no item D calculamos \vec{E}_I , portanto:

$$\vec{P}_I = \epsilon_0(K-1) \left\{ \sum_n \frac{n\pi A_n^{II} e^{-n\pi a/b}}{bK} \left[K \sinh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_x \right. \\ \left. + \sum_n \frac{n\pi A_n^{II} e^{-n\pi a/b}}{bK} \left[K \cosh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) - \sinh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{e}_y \right\}$$

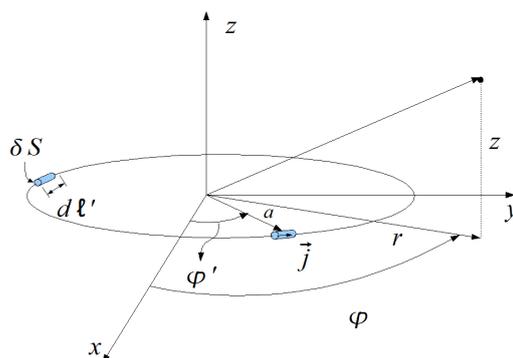
H.

$$\sigma_p|_{x=a} = \hat{n} \cdot \vec{P}_I = \hat{x} \cdot \vec{P}_I$$

$$\therefore \sigma_p|_{x=a} = \frac{\epsilon_0(K-1)}{K} \sum_n \frac{n\pi A_n^{II} e^{-n\pi a/b}}{b} \left[K \sinh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

4 Campo Magnético de uma Espira de Corrente

Um exemplo de cálculo do campo magnético é o de uma espira de corrente, porque têm muitas aplicações práticas. Consideremos uma espira circular, de raio a , transportando um corrente I . Queremos calcular o campo produzido pela corrente circulando na espira em qualquer ponto do espaço, fixado pelas coordenadas cilíndricas (r, θ, φ) . Em primeiro lugar, notamos que estamos supondo que a seção transversal do fio da espira tenha área δS suficientemente pequena para que possamos considerar



$$\vec{j}(\vec{r}') d\tau' = \vec{j}(\vec{r}') \delta S d\ell' = j(\vec{r}') \delta S \vec{\ell}' = I d\vec{\ell}'$$

O raio vetor em que está um elemento de corrente da espira é dado por

$$\vec{r}' = a\hat{e}'_r = \cos\varphi' \hat{e}_x + a \text{sen}\varphi' \hat{e}_y$$

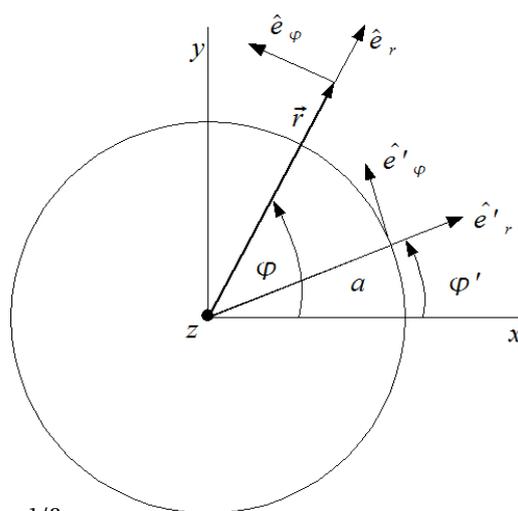
O raio do ponto de observação é dado por

$$\vec{r} = r \cos\varphi \hat{e}_x + a \text{sen}\varphi \hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

Portanto

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [(r \cos\varphi - a \cos\varphi')^2 + (r \text{sen}\varphi - a \text{sen}\varphi')^2 + z^2]^{1/2}$$

∴



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + a^2 + z^2 - 2ar(\cos\varphi \cos\varphi' + \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi')]^{1/2}$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos\alpha]^{1/2}$$

onde

$$\cos\alpha = \cos(\varphi - \varphi') = \cos\varphi \cos\varphi' + \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi' = \cos(\varphi - \varphi')$$

Finalmente, notamos que o elemento de comprimento $d\vec{\ell}'$, paralelo à densidade de corrente \vec{j} , é dado por

$$d\vec{\ell}' = a d\varphi' \hat{e}_\varphi'$$

Substituindo estas expressões para o potencial vetor, obtemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}_\varphi' d\varphi'}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos\alpha]^{1/2}}$$

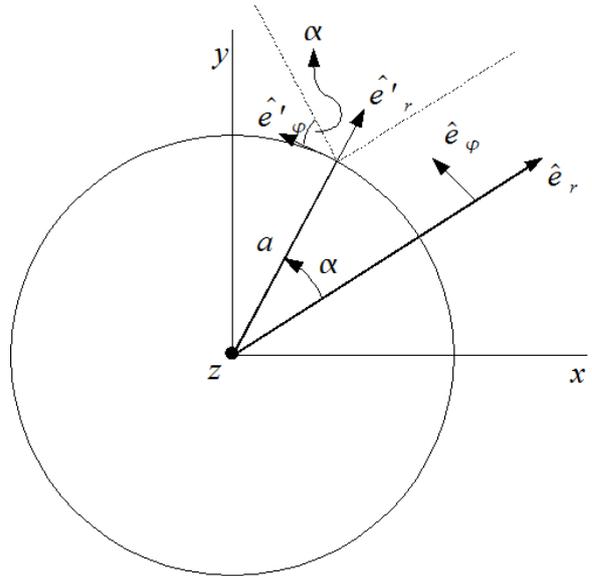
Para fazer a integral, temos que decompor \hat{e}_φ' em direções que permaneçam fixas durante a integração. É mais útil escolher as direções que dão a posição do ponto de observação onde \vec{A} deve ser determinado; nos referindo à figura, temos que ($d\alpha = d\varphi'$)

$$\hat{e}_\varphi' = \cos\alpha \hat{e}_\varphi - \text{sen}\alpha \hat{e}_r$$

Embora os versores do ponto onde queremos calcular o campo estejam em coordenadas cilíndricas e, portanto, dependem do ângulo φ , ele é fixo, pois determina um ponto específico no espaço.

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\alpha \hat{e}_\varphi - \text{sen}\alpha \hat{e}_r}{[a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos\alpha]^{1/2}}$$

No intervalo de integração a função $\cos\alpha$ é par e $\text{sen}\alpha$ é ímpar. Então a integral do termo en-



volvendo $\sin \alpha$ se anual e

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \hat{e}_\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{[a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha]^{1/2}}$$

Esta integral não pode ser expressa em termos de funções elementares; mas pode se expressas em funções das chamadas integrais elípticas,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; \quad \text{integral elíptica de primeira espécie}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta; \quad \text{integral elíptica de segunda ordem.}$$

onde $0 \leq k < 1$. [Arfken & Weber; Mathematical Methods for Physicists (8° ed)].

No entanto, para escrever a integral em termos dessas funções, são necessárias fazer algumas transformações não óbvias; vamos detalha-las a seguir.

1. Transformação $\beta = \pi - \alpha$; $\therefore \cos \alpha = -\cos \beta$; $d\alpha = -d\beta$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \hat{e}_\varphi \int_\pi^0 \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 + 2ar \cos \beta}}$$

2. Transformação $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \beta/2 = 1 - 2 \sin^2 \theta$; $\theta = \beta/2$; $d\beta = 2d\theta$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \hat{e}_\varphi \int_{\pi/2}^0 \frac{(1 - 2 \cos^2 \theta) d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 + r^2 + 2ar - 4ar \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{\hat{e}_\varphi}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \theta - 1) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

onde definimos

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$$

3. Finalmente, para tentar escrever a integral como uma combinação de integrais elípticas, fazemos

$$\frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} + c_2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \frac{c_1 + c_2 - c_2 k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

\therefore

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1 \\ \Rightarrow c_1 &= -1 + \frac{2}{k^2}; \quad c_2 = -\frac{2}{k^2} \\ c_2 k^2 &= -2; \end{aligned}$$

Então

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \hat{e}_\varphi \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \frac{2}{k^2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right]$$

Por outro lado, $\sqrt{(a+r)^2 + z^2} = \frac{2\sqrt{ar}}{k}$; então

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \sqrt{ar}}{\pi k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \hat{e}_\varphi$$

$$k = 2\sqrt{\frac{ar}{(a+r)^2 + z^2}}$$

Campo Magnético

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\varphi + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z$$

Como \vec{A} só tem componente φ , obtemos

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r}$$

Para calcular as derivadas, usamos as relações

$$\frac{dK}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k(1-k^2)}; \quad \frac{dE}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k}$$

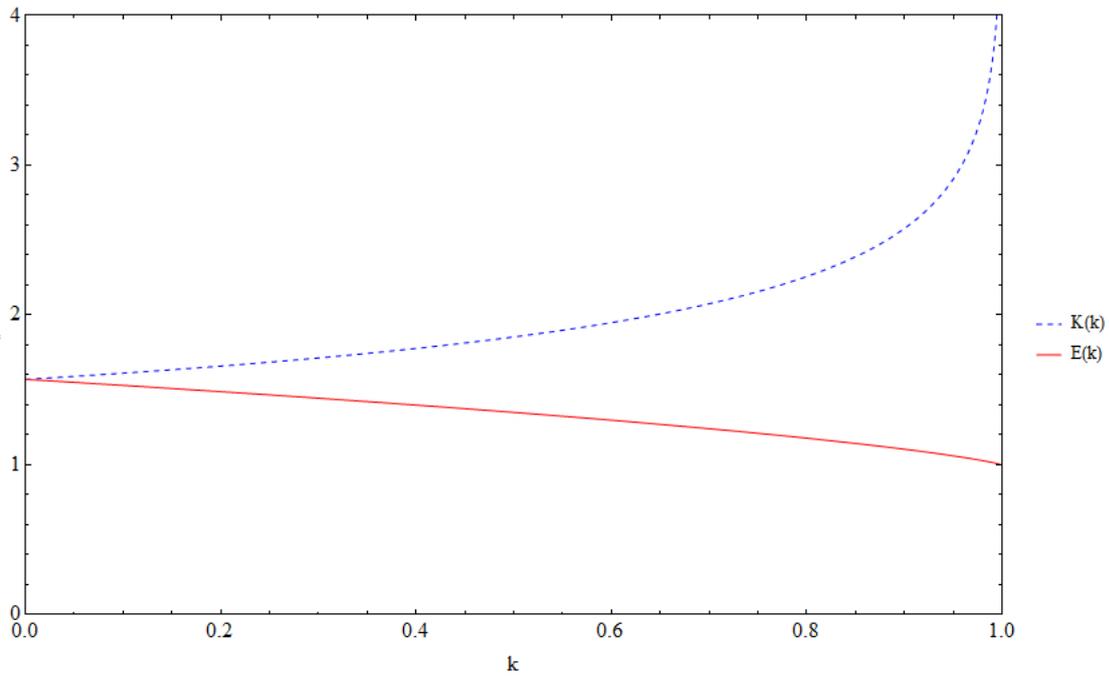
$$\frac{dK}{dr} = \frac{k}{2r} \frac{(a+r)^2 + z^2 - 2(a+r)r}{(a+r)^2 + z^2}; \quad \frac{dK}{dz} = \frac{k}{2r} \frac{a^2 - r^2 + z^2}{(a+r)^2 + z^2}$$

Com estas relações obtemos as expressões para B_z e B_r , com um pouco de álgebra. Não vamos fazer todas as derivações em aula, deixando-as para a quarta série de exercícios. O resultado final é

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{[(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right]$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{[(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right]$$

Estas expressões são obrigatoriamente complexas, mas fáceis de serem utilizadas em cálculos numéricos. Primeiro é importante notar que, quando $k \rightarrow 0$, $K(0) = E(0) = \pi/2$. Quando $k \rightarrow 1$, $K(k \rightarrow 1)$ divergente, mas $E(k=1) = 1$. Então o comportamento das duas funções é monotônico em função de k , como mostra a figura.



Para implementação em cálculos numéricos, normalmente se utilizam as aproximações polinomiais para $K(k)$ e $E(k)$ disponíveis em *M. Abramovitz & I. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Section 17.3* [disponível em people.math.sfu.ca/~cbm/aadns].

Uma calculadora online para estas funções pode ser encontrada em:
keisan.casio.com/exec/system/1180573454.