Eletromagnetismo I

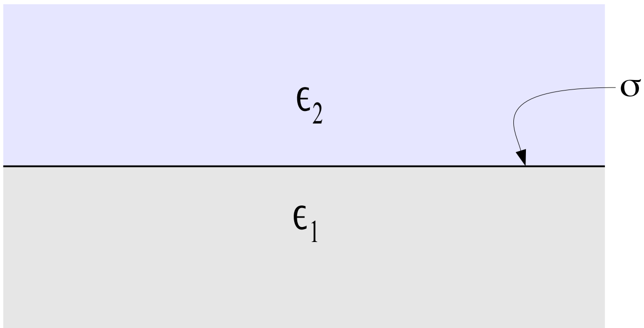
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

<u>Aula 18</u>

Condições de Contorno para os campos $\vec{E}$ e $\vec{D}$

Suponhamos que temos dois meios com constantes dielétricas distintas ϵ_1 e ϵ_2, separados por uma interface onde, numa situação geral, pode estar depositada uma camada de cargas <u>livres</u>, representada pela densidade superficial de carga σ. Vamos determinar as condições que relacionam os campos $\vec{E}$ e $\vec{D}$, nos dois meios, na transição entre eles, ou seja, na interface.

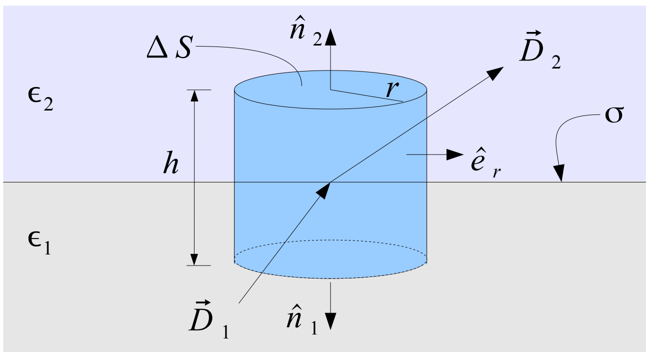


Componente Normal

Primeiro consideremos as componentes normais dos campos na interface. Sabemos que, mesmo na presença de cargas de polarização,

$$\oint_{S'} \vec{D}\cdot\hat{n}dS = q_{livre}$$

para qualquer superfície fechada.



Então tomemos a superfície cilíndrica mostrada na figura, de base ΔS e altura h. Suponhamos, no caso mais geral possível, que tanto no meio 1 como no 2 podem haver cargas livres mesmo fora da superfície, com densidade volumétrica de carga ρ_1 e ρ_2, respectivamente.

Como o cilindro é pequeno (vamos tomar o limite $h \to 0$, posteriormente), podemos escrever

$$\oint \vec{D}\cdot\hat{n}dS \approx \vec{D}_2\cdot\hat{n}\Delta S + \vec{D}_1\cdot\hat{n}_1\Delta S + \frac{h}{2}\oint\left(\vec{D}_1+\vec{D}_2\right)\cdot\hat{e}_r r d\theta$$

Por outro lado, a carga livre total dentro do cilindro será

$$q_{livre} \approx \sigma \Delta S + \rho_1 \frac{h\Delta S}{2} + \rho_2 \frac{h\Delta S}{2} = \sigma \Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) h \Delta S$$

Substituindo estas expressões na integral para $\vec{D}$, temos

$$\vec{D} \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S + \frac{h}{2} \oint \left(\vec{D}_1 + \vec{D}_2\right) \cdot \hat{e}_r r d\theta \approx \sigma \Delta S + \frac{1}{2} \left(\rho_1 + \rho_2\right) h \Delta S$$

$$\therefore \vec{D} \cdot \hat{n}_2 + \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 = \sigma + \frac{1}{2} \left[\rho_1 + \rho_2 - \frac{1}{\Delta S} \oint \left(\vec{D}_1 + \vec{D}_2\right) \cdot \hat{e}_r r d\theta\right] h$$

Então, no limite $h \to 0$, temos $(-\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 = \hat{n})$

$$\boxed{\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \hat{n} = \sigma}$$

onde o versor $\hat{n}$ normal à interface aponta do meio 1 para o 2.

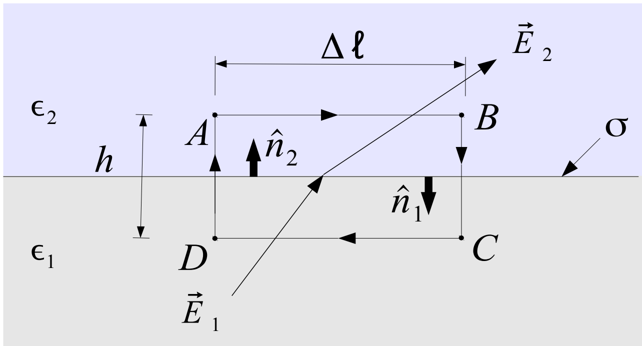
No caso corriqueiro $\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{n_2} = D_{n_1}$

Componente Tangencial

Para determinar a condição de contorno para a componente tangencial, vamos utilizar outra propriedade do campo elétrico,

$$\nabla \times \vec{E} = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

[Note que, em geral, $\nabla \times \vec{D} \neq 0$!]



Vamos aplicar esta condição ao contorno retangular indicado na figura, que atravessa a interface. Como, outra vez, consideramos $\Delta\ell$ muito pequeno e que, posteriormente vamos tomar o limite $h \to 0$, $\Delta\ell \to 0$ podemos escrever

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{\ell} - \frac{1}{2}\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 h + \frac{1}{2}\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 h - \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{\ell} - \frac{1}{2}\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 h + \frac{1}{2}\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 h = 0$$

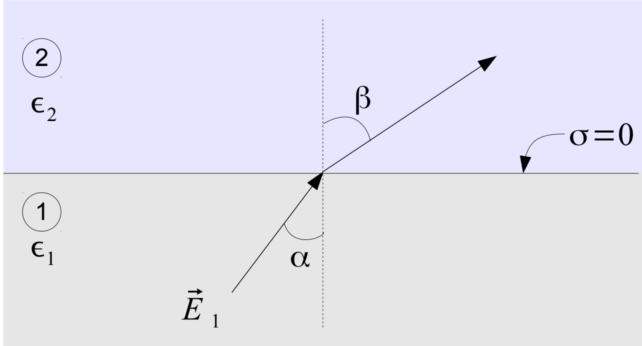
Fazendo $h \to 0$, temos

$$\therefore \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \cdot \Delta\vec{\ell} = 0$$

ou seja, a componente tangencial de $\vec{E}$ é contínua na interface,

$$\boxed{E_{t_2} = E_{t_1}}$$

Exemplo: Consideremos a interface entre dois dielétricos sem cargas livres. Se o campo elétrico no meio 1 fizer um ângulo α com a normal à interface, determine o ângulo β feito pelo campo no meio 2 com a normal.



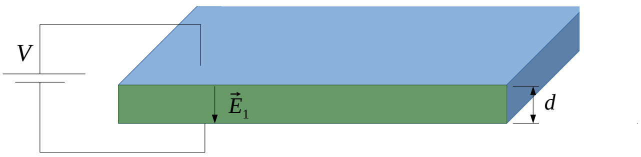
$$D_{n_1} = D_{n_2} \qquad \therefore \cancel{\epsilon_0}\epsilon_1 E_1 \cos\alpha = \cancel{\epsilon_0}\epsilon_2 E_2 \cos\beta$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad \therefore E_1 \operatorname{sen}\alpha = E_2 \operatorname{sen}\beta$$

$$\therefore \frac{1}{\epsilon_1}\tan\alpha = \frac{1}{\epsilon_2}\tan\beta \qquad \therefore \boxed{\tan\beta = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\tan\alpha}$$

Efeito de um dielétrico em um capacitor (Ex 4.6)

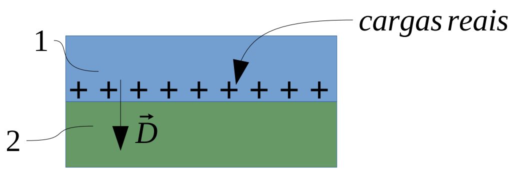
Consideremos o capacitor de placas paralelas mostrado na figura. O espaço de espessura d entre as placas está preenchido com um dielétrico de constante dielétrica ϵ_r ($\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$), a área das placas é S e uma tensão V é aplicada entre elas. Calcular a capacitância C do sistema, desprezando efeitos de borda.



Desprezando esses efeitos, temos

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = V \qquad \Rightarrow \qquad V = Ed$$

Na superfície da placa estão cargas reais, no meio dielétrico cargas de polarização. Mas como, sem efeitos de borda, o campo elétrico é normal à superfície das placas, podemos utilizar, na interface placa-dielétrico, a condição de contorno para $\vec{D}$ normal, ou seja,



$$D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$$

Mas $D_{n_1} = 0$, porque está dentro do condutor. Portanto

$$\sigma = D_{n_2} = \epsilon_0\epsilon_r E = \epsilon_0\epsilon_r \frac{V}{d}$$

A carga total será

$$Q = S\sigma \qquad \therefore Q = \epsilon_0\epsilon_r \frac{SV}{d} \qquad \therefore \boxed{C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d}}$$

A carga de polarização no dielétrico será $\sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P} = -\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$

$$\therefore \boxed{\sigma_p = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\sigma}$$

Outro problema importante deste tópico é o 4.19 do livro texto.

Como um exemplo mais complexo, vamos resolver o seguinte problema que fez parte de um das provas do Exame Unificado de Física.

Q7. Um capacitor possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, a metade inferior do volume entre dois condutores é preenchida por um líquido de constante dielétrica K, conforme indicado na seção reta da figura abaixo.

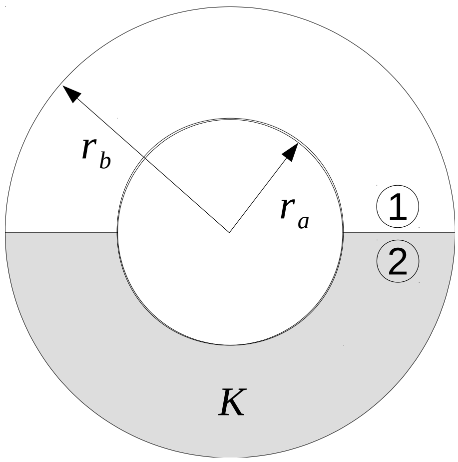
a) Calcule o módulo do campo elétrico no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume.

b) Determine a densidade superficial de cargas livres sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.

c) Calcule a densidade superficial de cargas de polarização sobre as superfície interna (r_a) e externa (r_b) do dielétrico.

d) Qual é a densidade superficial de cargas de polarização sobre a superfície plana do dielétrico?

e) Determine a capacitância do sistema.



Notamos que nesta configuração, o dielétrico deve afetar o campo elétrico. Mas, se considerarmos que a interface entre os meios 1 e 2 está na direção radial e que $E_{t_1} = E_{t_2}$, temos que o campo $\vec{E}$ também deve ser radial e o mesmo nos dois meios.

Por outro lado, como

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}dS = q_{livre}$$

tomando uma superfície de Gauss esférica de raio r entre r_a e r_b, temos

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}dS = Q \qquad \therefore 2\pi r^2\left(\vec{D}_1+\vec{D}_2\right) = Q$$

Mas, como $E_1 = E_2$

$$\frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{D_2}{\epsilon_0 K} \qquad \therefore D_2 = KD_1 = K\epsilon_0 E_1$$

$$\therefore 2\pi r^2\epsilon_0\left(1+K\right)E_1 = Q \qquad \therefore \boxed{E_1 = \frac{Q}{2\pi\left(1+K\right)\epsilon_0 r^2} = E_2}$$

Pedimos para que os aluno completarem a solução do problema.

Equação de Laplace em Meios Materiais

Nós vimos que o vetor deslocamente elétrico satisfaz a equação

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

onde ρ são as cargas livres do meio (a não ser quando necessário, não usaremos o subscrito "ℓ" para cargas livres). Por outro lado, como

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

temos

$$\epsilon_0\nabla\cdot\vec{E}+\nabla\cdot\vec{P} = \rho$$

Nos casos de dielétrico lineares, temos que $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$, onde a susceptibilidade elétrica χ é uma constante. Nesses casos, e somente neles, podemos então escrever

$$\epsilon_0\left(1+\chi\right)\nabla\cdot\vec{E} = \rho \qquad \therefore \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}; \qquad \epsilon_r = 1+\chi$$

ou

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}; \qquad \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$$

Então, como $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos que, mesmo na presença de dielétricos, o potencial eletrostático satisfaz a Equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Se não houver cargas livres no sistema, isto é, $\rho = 0$, então o potencial eletrostático satisfaz a Equação de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0$$

Conduto, vimos que a fonte de fluxo do vetor $\vec{D}$ é a densidade de cargas livres, ou seja,

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \qquad\qquad (\rho = \rho_{livre})$$

Por outro lado, em um meio dielétrico linear e isotrópico, temos que

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$$

Portanto, se o meio dielétrico não for uniforme, ou seja, se ϵ variar com a posição, temos que

$$\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\left(\epsilon\vec{E}\right) = \epsilon\nabla\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\nabla\epsilon = \rho$$

Como $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos

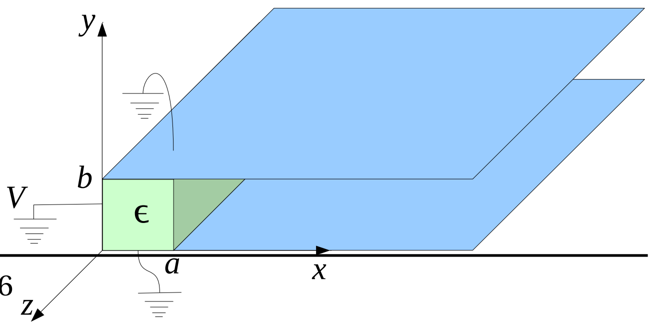
$$-\epsilon\nabla^2\phi - \nabla\phi\cdot\nabla\vec{E} = \rho \qquad\qquad \therefore \nabla^2\phi + \frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\cdot\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Portanto, a equação de Poisson só é válida se o dielétrico for uniforme, ou seja, $\nabla\epsilon = 0$; somente neste caso temos:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2\rho = 0 \quad \text{quando} \quad \rho_{livre} = 0$$

No entanto, a presença de dielétricos modifica substancialmente as condições de contorno que devemos satisfazer ao resolver a Equação de Laplace. Quando as superfícies que delimitam a região onde o potencial deve ser determinado são condutoras, basta impor a condição $\phi = constante$ em cada superfície. Mas, na presença de dielétricos, podemos ter uma interface entre dois dielétricos diferentes, ou seja, com diferentes valores de ϵ. Como a interface não é condutora, o valor do potencial não necessita ser constante nela. Porém, os campos $\vec{E}$ e $\vec{D}$ devem satisfazer as condições de contorno que vimos. Isso implica que, nas interfaces entre dielétricos, ao invés de impor condições de contorno para o potencial ϕ, teremos que impor condições de contorno para suas derivadas, pois $\vec{E} = -\nabla\phi$.

Consideremos, por exemplo, uma modificação de um problema que já vimos, o Exemplo 3.3 do livro texto, em que a placa polarizada com tensão V possuí uma camada dielétrica



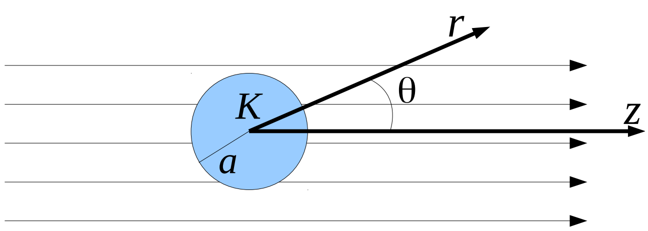
de espessura a, conforme indica a figura. Este problema será solucionado na aula de exercícios do dia 28/09. Mas o método de solução é o mesmo para todos os problemas deste tipo.

- Resolver a Equação de Laplace nas regiões com e sem dielétrico como regiões distintas
- Impor as condições de contorno apropriadas para o potencial em cada região
- Finalmente, impor as condições para as componentes normal de $\vec{D}$ e tangencial de $\vec{E}$ na interface dielétrica entre os dois meios

Vamos exemplificar este método para um problema um pouco mais complexo, o Exemplo 4.7 do livro texto.

Esfera dielétrica imersa em um campo elétrico uniforme

Suponhamos um campo elétrico uniforme, $\vec{E} = E_0\hat{e}_z$, no qual inserimos uma esfera dielétrica de raio a e constante dielétrica K. Esta é a versão dielétrica para o exemplo da esfera condutora, que já vimos.



Sabemos que a solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas é ($\partial\phi/\partial\varphi = 0$)

$$\phi(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3}\right)P_2(\cos\theta) + \ldots$$

e, pela solução que já vimos para a esfera condutora, quando $r \to \infty$ o potencial é dado por

$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \phi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta$$

(já fizemos a constante $C = 0$, pois sabemos que o potencial pode ser modificado somando uma constante, sem afetar o campo).

Vamos agora aplicar esta solução para as duas regiões do problema, fora e dentro da esfera.

Região Externa

Tomando a condição de contorno para $r \to \infty$, temos que o potencial fora da esfera tem que satisfazer a condição

$$\phi_f(r,0)\big|_{r\to\infty} = A_0^f + A_1^f r\cos\theta + A_2^f r^2 P_2(\cos\theta) + \ldots = -E_0 r\cos\theta$$

Portanto, temos que $A_\ell^f = 0$; $\ell \neq 1$; $A_1^f = -E - 0$, ou seja,

$$\phi_f(r,\theta) = \frac{B_0^f}{r} + \left(-E_0 r + \frac{B_1^f}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{B_2^f}{r^3}P_2(\cos\theta) + \ldots$$

<u>Região Interna</u>

Na região interna, temos que evitar a divergência de $\phi_d(r,\theta)$ quando $r \to 0$. Então, todos os coeficientes B_ℓ^d dentro têm que ser nulos, ou seja,

$$\phi_d(r,\theta) = A_0^d + A_1^d r\cos\theta + A_2^d P_2(\cos\theta) + \ldots$$

Condição de Contorno na Superfície da Esfera

Na superfície da esfera o potencial não necessita ser constante, pois não é uma superfície condutora. Mas as condições de contorno para $\vec{E}$ e $\vec{D}$ devem ser satisfeitas. Como não há carga real na esfera, temos

$$r \to a \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{lllll} E_{tf} = E_{td} & \Rightarrow & E_{\theta f} = E_{\theta d} & \Rightarrow & \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_f}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_d}{\partial\theta}\right]_{r=a} \\ & & & & \\ D_{tf} = D_{td} & \Rightarrow & \epsilon_0 E_{rf} = \epsilon_0 K E_{rd} & \Rightarrow & \left[\epsilon_0\frac{\partial\phi_f}{\partial r} = \epsilon_0 K\frac{\partial\phi_d}{\partial r}\right]_{r=a} \end{array} \right.$$

Aplicando a condição de contorno para a componente tangencial, temos

$$E_0\cancel{a}\,\text{sen}\,\theta - \frac{B_1^f}{a^3}\,\text{sen}\,\theta + \frac{B_2^f}{a^4}\left[\frac{d}{d\theta}P\ell(\cos\theta)\right] + \ldots = -A_1^d\cancel{a}\,\text{sen}\,\theta - A_2^d\cancel{a}^{\cancel{2}}\left[\frac{d}{d\theta}P_2(\cos\theta)\right]$$

Portanto,

$$A_1^d = -E - 0 + \frac{B_1^f}{a^3}$$

$$A_2^d = \frac{B_2^f}{a^3}$$

Fazendo o mesmo para a componente normal de $\vec{D}$, temos

$$A_1^d \quad = \quad -E_0 + \frac{B_1^f}{a^3}$$

$$A_2^d = \frac{B_2^f}{a^3}$$

Fazendo o mesmo para a componente normal de $\vec{D}$, temos

$$-\frac{B_0^f}{a^2} - E_0\cos\theta - 2\frac{B_1^f}{a^3}\cos\theta - 3\frac{B_2^f}{a^4}P_2(\cos\theta) + \ldots =$$

$$= K\left[A_1^d\cos\theta + 2A_2^d a P_2(\cos\theta) + \ldots\right]$$

Portanto

$$B_0^f = 0$$

$$E_0 + 2\frac{B_1^f}{a^3} = -K A_1^d$$

$$-3\frac{B_2^f}{a^4} = 2K a A_2^d$$

Das duas relações para A_1^d tiramos

$$A_1^d = -3\frac{E_0}{2+K}; \qquad B_1^f = \frac{(K-1)\,a^3 E_0}{2+K}$$

e para todas as outras constantes obtemos $\underline{A_\ell^d = B_\ell^f = 0;\ \ell \geq 2}$.

Assim temos

$$r < a: \qquad \phi_d(r,\theta) = A_0^d - \frac{3E_0 r}{(2+K)r^2}\cos\theta$$

$$r > a: \qquad \phi_f(r,\theta) - E_0 r\cos\theta + \frac{(K-1)\,a^3 E_0}{(2+K)\,r^2}\cos\theta$$

A constante A_0^d é arbitrária. Mas, impondo que o potencial seja contínuo em $r = a$, é fácil obter que $A_0^d = 0$.

Complete a solução deste problema calculando o campo elétrico dentro e fora da esfera. Mostre que dentro da esfera o campo elétrico é uniforme

$$\vec{E} = \frac{3}{2+K}\vec{E}_0$$