Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2° Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 15

Na aula de hoje abordaremos os seguintes tópicos:

- O potencial vetor $\vec{A}$
- Condições de contorno
- Expansão multipolar de $\vec{A}$

Leis da magnetostática

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \text{ (por consistência)} \end{aligned}$$

Vimos que é possível escrever o campo magnético como o produto vetorial de um campo vetorial, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, e que em um certo "calibre", onde $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, vimos que podemos escrever

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad \longleftrightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

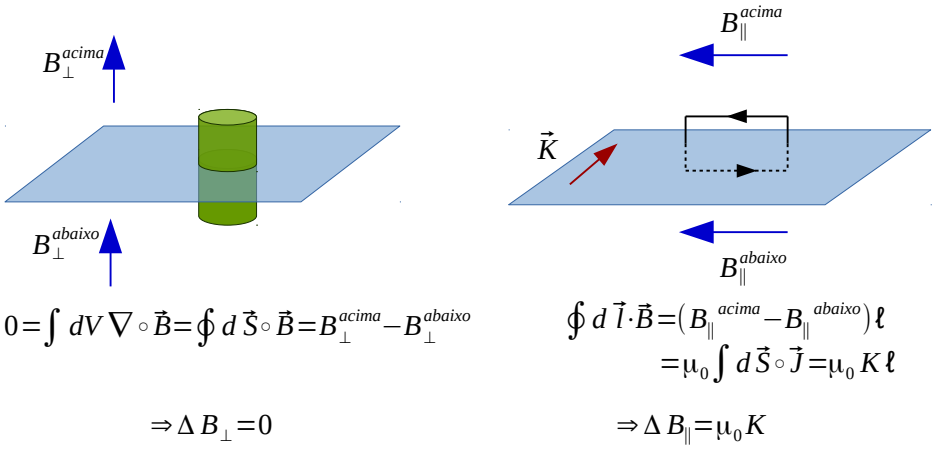
Portanto, assim como no caso de ϕ e da equação de Laplace, podemos nos perguntas: quais as condições de contorno que $\vec{A}$ deve satisfazer? A ideia subjacente é que existe alguma "interface", uma superfície dentro da qual $\vec{J} \neq 0$, e fora dela, $\vec{J} = 0$.

Assim como na eletrostática, temos

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad &\longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{E}_\parallel = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

Na magnetostática, vamos ter algo semelhante, onde agora teremos ,$\rho \leftrightarrow \sigma$ assim como $\vec{J} \leftrightarrow \vec{K}$ (densidade de corrente superficial). Podemos até adivinhar:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{B}_\perp = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \Delta\vec{B}_\parallel = \mu_0\vec{K} \quad &\longleftrightarrow \quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \end{aligned}$$



Note que, no circuito de $\vec{B}_\parallel$, poderíamos ter escolhido $d\vec{l} \perp \vec{B}$, e nesse caso, $\oint d\vec{l}\cdot\vec{B} = 0$! Nesse caso, $\vec{K}$ seria paralelo à superfície, ou seja, $\vec{K}\cdot\hat{n} = 0$ e $\int d\vec{S}\cdot\vec{J} = 0$ e, portanto ΔB (paralelo à superfície e à $\vec{K}$) = 0.

Podemos sintetizar todas essas condições como

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\vec{K}\times\hat{n}} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta\vec{B}_\perp = \Delta\vec{B}_\perp\cdot\hat{n} = 0 \\ \Delta\vec{B}_\parallel = \mu_0\vec{K} \qquad\qquad \text{com } \Delta\vec{B}\perp\vec{K} \end{cases}$$

Exercício: Mostre que as condições de contorno da magnetostática, quando aplicadas ao potencial vetor $\vec{A}$ resultam em

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A} &= 0 \\ \Delta\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial n}\right) &= -\mu_0\vec{K} \end{aligned}$$

Soluções da equação de Laplace para o potencial vetor

Vamos agora buscar por soluções da equação de Laplace vetorial, com as condições de contorno deduzidas na última seção. Em termos do potencial vetor $\vec{A}$, as condições de contorno podem ser expressas como

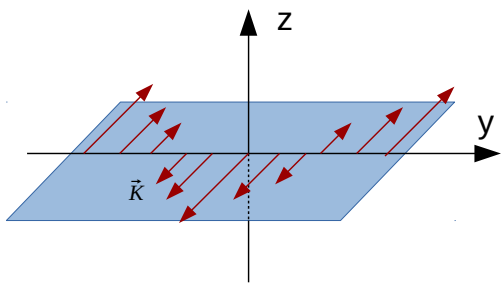
$$\Delta\vec{A} = 0 \qquad (\vec{A} \text{ é contínuo, assim como } \phi)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial n}\right) = -\mu_0\vec{K} \qquad \begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \quad = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Plano infinito

Suponha agora o caso do plano infinito em $z = 0$, onde a densidade de corrente é dada por $\vec{K} = K_0\hat{x}\cos(\alpha y)$

Vamos tentar a solução por separação de variáveis do tipo $\vec{A} = \vec{A}_0 X(x)\, Y(y)\, Z(z)$.



- $\vec{B}$ não pode depender de x, por simetria: $\vec{A} = \vec{A}(y,z)$
- Fora do plano ($z \neq 0$): $\nabla^2\vec{A} = 0$:

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad = \quad 0$$

Portanto

$$\begin{aligned} Y(y) &\sim \cos(\alpha y), \sin(\alpha y) \\ Z(y) &\sim e^{\pm\alpha z} \quad \begin{cases} - & z > 0 \\ + & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

No limite de z indo ao infinito, a solução de $Z(z)$ é bem comportada.

Condições de contorno

- $\vec{A}$ é contínuo em $z = 0$: Ok, se $\vec{A}_0$, é o mesmo em $z > 0$ e $z < 0$, pois $e^{-\alpha 0} = e^{-\alpha 0} = 1$
- $\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \mu_0\vec{K}$, então

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{A}_0\cos(\alpha y)\, e^{-\alpha z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{A}_0\cos(\alpha y)\, e^{-\alpha z}\right)\right]_{z=0} = -\mu_0\vec{K} = \mu_0 K_0\hat{x}\cos(\alpha y)$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{A}_0\cos(\alpha y) - (-\alpha)\,\alpha\vec{A}\cos(\alpha y) = -\mu_0 K_0\hat{x}\cos(\alpha y)$$

$$\therefore \qquad \vec{A}_0 = \frac{\mu_0 K_0}{2\alpha}\hat{x}$$

Assim

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 K_0}{2\alpha} \hat{x} \cos(\alpha y) e^{\pm \alpha z}$$

Campo magnético:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{z} \\
&= \frac{\mu_0}{2\alpha} \left[\mp \alpha \cos(\alpha y) e^{\mp \alpha z} \hat{y} + \alpha \sin(\alpha y) e^{\mp \alpha z} \hat{z} \right]
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \left[\mp \cos(\alpha y) e^{\mp \alpha z} \hat{y} + \sin(\alpha y) e^{\mp \alpha z} \hat{z} \right]}$$

E, no limite de $\alpha \to 0$,

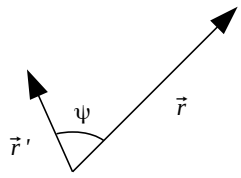
$$\vec{B} = \mp \frac{\mu_0 K_0}{2} \hat{y}$$

como obtivemos anteriormente com a lei de Ampère.

Expansão multipolar de $\vec{A}$

Vamos agora retornar a nossa expressão para $\vec{A}$ em termos de uma densidade de corrente

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Note que o termo $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ pode ser expandido como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r_>} \left[1 + \left(\frac{r_<}{r_>} \right) \cos\psi + \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^2 \frac{1}{2} \left(3\cos^2\psi - 1 \right) + \ldots \right] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\psi)
\end{aligned}$$

onde $\cos\psi = \hat{r} \cdot \hat{r}'$. e

$$\begin{aligned}
r_< &= \min(r, r') \\
r_> &= \max(r, r').
\end{aligned}$$

Portanto o potencial vetor pode ser escrito como

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\vec{J}(\vec{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\psi)$$

Assumindo que estamos medindo $\vec{A}$ e $\vec{B}$ longe de onde estão as correntes, então $r_< \to r'$, $r_> \to r$, e temos

$$\boxed{A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int dV'\vec{J}(\vec{r}')\vec{r}'^l P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')}$$

No casso de correntes superficiais, o potencial vetor passa a ser escrito como

$$\boxed{A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int dS'\vec{K}(\vec{r}')\vec{r}'^l P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')}$$

ou, no caso de correntes em fios infinitesimais,

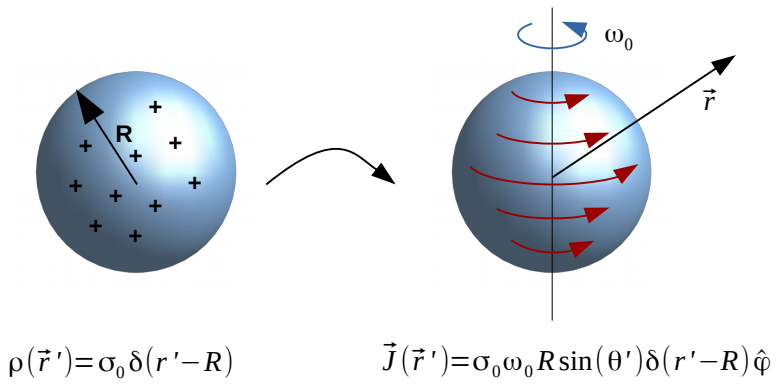
$$\boxed{A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int Id\vec{l}'\vec{r}'^l P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')}$$

Em um circuito:

- $l = 0$: $\oint d\vec{l}'(r')^0 1 = \oint d\vec{l}' = 0$! Ou seja, não há monopolos magnéticos.
- $l = 1$: $\oint d\vec{l}'(r')\hat{r}\cdot\hat{r}' = \oint d\vec{l}'\hat{r}\cdot\vec{r}' = \text{área}\hat{n}\times\hat{r}$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\text{área}\hat{n})\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{(dipolo magnético)}$$

Esfera carregada em rotação uniforme



Vamos escolher um ponto num raio r fora da casca esférica, no eixo $x \to \vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$ e

$$
\begin{aligned}
\vec{r}' &= x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} = r\left(\sin\theta'\cos\varphi'\hat{x} + \sin\theta'\cos\varphi'\hat{y} + \cos\theta'\hat{z}\right) \\
\hat{r}' &= \sin\theta'\cos\varphi'\hat{x} + \sin\theta'\cos\varphi'\hat{y} + \cos\theta'\hat{z}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{z} \\
\hat{r} &= \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}
\end{aligned}
$$

e também

$$
\hat{r}\cdot\hat{r}' = \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'
$$

Assim

$$
A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int dV'\left[\sigma_0\omega_0 R\sin\theta'\delta\left(r'-R\right)\hat{\varphi}\right]\vec{r}'^{l}P_l\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)
$$

ou mais explicitamente,

$$
A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0\omega_0 R\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int dr'\delta\left(r'-R\right)\vec{r}'^{l}\int_0^{2\pi}\hat{\varphi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta' P_l\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'\right)
$$

- $l = 0$: $P_0 = 1$ e

$$
\begin{aligned}
\vec{A}_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int dr' r'^2\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int d\varphi'\left[\sigma_0\omega_0 R\sin\theta'\delta\left(r'-R\right)\hat{\varphi}\right] \\
& \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma_0\omega_0 R^3}{r}\int_0^{\pi}\sin^2\theta' d\theta'\underbrace{\int d\varphi'\hat{\varphi}\left(\varphi'\right)}_{=0}
\end{aligned}
$$

- $l = 1$:

$$
\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma_0\omega_0 R^4}{r^2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta' d\theta'\int d\varphi'\hat{\varphi}\left(\varphi'\right)\left[\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'\right]
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi\hat{\varphi}\left(\varphi'\right) &= 0 \\
\int_0^{2\pi} d\varphi\hat{\varphi}\left(\varphi'\right)\cos\varphi' &= \int_0^{2\pi} d\varphi\left(+\cos\varphi'\hat{y} - \sin\varphi'\hat{x}\right)\cos\varphi' = 0 \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi'\cos^2\varphi' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi'\sin^2\varphi' = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Então

$$
A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0\omega_0\left[0\times\frac{R^3}{r} + \frac{4\pi}{3}\times\frac{R^4}{r^2}\sin\theta\hat{\varphi} + \ldots\right]
$$

Exercício: Mostre que os termos $\vec{A}_l$ com $l > 1$ são nulos.

Campo magnético

Como o problema tem simetria azimutal, $z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$,

$$\vec{B} = B_\rho\left(\rho, z\right)\hat{\rho} + B_z\left(\rho.z\right)\hat{z}$$

e

$$A\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0\omega_0\frac{R^4}{r^2}\sin\theta\hat{\varphi}$$

Então

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\phi\right)}{\partial\rho}\hat{z} \\
&= \frac{\mu_0\sigma_0\omega_0 R^4}{3}\left[\frac{3\hat{z}\cdot\hat{\rho}}{r^5}\hat{\rho} + \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3\rho^2}{r^5}\right)\hat{z}\right] \\
&= \frac{\mu_0\sigma_0\omega_0}{3}\frac{R^4}{r^3}\hat{z}
\end{aligned}$$