

Mecânica Quântica I - 4302403

4ª lista

1) a) Use a relação :

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle$$

para o operador $\vec{r} \cdot \vec{p}$ para provar o **teorema do virial** tridimensional para estados estacionários:

$$2\langle T \rangle = \langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \rangle.$$

b) Aplique o teorema do virial ao oscilador harmônico tridimensional e mostre que nesse caso $\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2$.

c) Aplique o teorema do virial ao átomo de hidrogênio e mostre que nesse caso $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle = -2E_n$.

2) Os operadores de levantamento e abaixamento mudam o valor de m de uma unidade:

$$L_{\pm}|l, m\rangle = c_{\pm}|l, m \pm 1\rangle,$$

onde $c_{\pm}$ é uma constante. Mostre que se as funções $|l, m\rangle$, são normalizadas então:

$$c_{\pm} = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

Dica: Observe que $L_{\pm}$ é o hermitiano conjugado de $L_{\mp}$, e use a relação : $L^2 = L_{\pm}L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$. Mostre também que, com esse resultado, é imediato obter: $L_-|l, -l\rangle = 0$, $L_+|l, l\rangle = 0$.

3) a) Começando pelas relações de comutação canônicas para posição e momento mostre que:

$$[L_z, x] = i\hbar y; \quad [L_z, y] = -i\hbar x; \quad [L_z, z] = 0,$$

$$[L_z, p_x] = i\hbar p_y; \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x; \quad [L_z, p_z] = 0.$$

b) Utilize os resultados de a) para mostrar que $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$.

c) Utilize os resultados de a) para mostrar que $[L_z, r^2] = [L_z, p^2] = 0$.

d) Usando o resultado de c) mostre que se $V = V(r^2)$, ou seja, se V depende apenas do módulo de $\vec{r}$ então $[H, L_z] = 0$.

e) Generalize o resultado de d) para mostrar que para $V = V(r)$, $[H, \vec{L}] = 0$.

4) Mostre que

a) para potenciais esfericamente simétricos

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = 0.$$

b) para potenciais $V = V(\vec{r})$

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{\tau} \rangle,$$

onde $\vec{\tau} = \vec{r} \times (-\nabla V)$ é o torque. Esse resultado é o teorema de Ehrenfest para o torque.

5) Uma partícula num potencial esféricamente simétrico está num dos autoestados de L^2 e L_z com autovalores $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar m$, respectivamente.

a) Prove que os valores esperados entre os estados $|l\ m\rangle$ satisfazem:

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \quad \langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{[l(l+1) - m^2]\hbar^2}{2}$$

b) Usando esses resultados cheque a relação

$$\langle (\Delta L_x)^2 \rangle \langle (\Delta L_y)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [L_x, L_y] \rangle|^2$$

6) Duas partículas de massa m estão ligadas às extremidades de uma barra rígida, sem massa, de comprimento a . O sistema é livre para girar em três dimensões em torno do centro, mas o ponto central é fixo.

a) Mostre que a hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{L^2}{ma^2}.$$

Dica: expresse a energia cinética clássica em termos do momento angular total.

b) Quais são as auto-funções e as auto-energias desse sistema?

c) Qual é a degenerescência do l -ésimo nível de energia?