

Eletromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 4

Equações de Maxwell

O livro texto inicia a apresentação de Eletromagnetismo pela Eletrostática. No entanto, antes de estudar detalhes deste tópico, é conveniente recordar todas as leis de básicas do eletromagnetismo, vistas no ciclo básico, utilizando o aparato de Cálculo Vetorial que acabamos de rever.

Um teorema básico de Cálculo Vetorial, que é denominado Teorema de Helmholtz é apresentado no apêndice B do livro texto. Essencialmente o teorema demonstra que se as fontes de fluxo, representada pela função escalar $G(\vec{r})$, e de circulação, representada pela função vetorial $\vec{C}(\vec{r})$ forem especificadas, isto é,

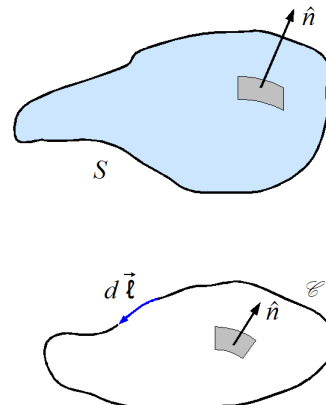
$$\nabla \cdot \vec{F} = G(\vec{r}); \quad \nabla \times \vec{F} = \vec{C}(\vec{r})$$

e se ambas tenderem a zero mais rapidamente que $1/r^2$ quanto $r \rightarrow \infty$, então a função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ está univocamente determinada.

Além do teorema, vamos necessitar do

$$\textbf{Teorema de Gauss} : \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau$$

$$\textbf{Teorema de Stokes} : \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$



e das identidades vetoriais

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = (\nabla f) \times \vec{A} + f(\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}; \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0; \quad \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

Leis Básicas do Eletromagnetismo

(H. M. Nussenzveig, Curso de Física, Vol. 3; cap 12)

Lei de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau; \quad \rho = \frac{dq}{dV};$

Lei de Gauss para $\vec{B}$: $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$

Lei de Faraday: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}; \quad \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \text{fluxo magnético}$

Lei de Ampère-Maxwell: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$
 $I = \int \vec{j} \cdot \hat{n} dS; \quad \phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \text{fluxo elétrico}$

Vamos agora ver como essas equações definem as fontes de fluxo e de circulação para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Fontes de Fluxo

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau \quad \therefore \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

$$\therefore \int_V \left[\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Portanto a densidade de carga é a fonte de fluxo para o campo elétrico.

Da mesma forma, como

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

concluimos que o campo magnético não possui fontes de fluxo.

Nota: Na última passagem da derivação acima, se pode questionar porquê a integral de volume de $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ser nula implica que o integrando seja nulo. Naturalmente, podemos encontrar exemplos que a integral de volume de uma grandeza seja nula, para um dado volume, sem que o integrando seja nulo em todos os pontos do espaço.

No entanto, na derivação que fizemos o volume V é arbitrário, ou seja, a integral tem que ser nula para qualquer volume que se escolha. Isto só é possível se o integrando foi nulo.

Fontes de Circulação

Da lei de Faraday, temos:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Ao passar a derivada temporal para dentro da integral, consideramos somente a derivada parcial, supondo fixa a superfície através da qual o fluxo magnético é calculado. A situação de superfície em movimento será vista mais tarde.

Agora, utilizando o Teorema de Stokes:

$$\therefore \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \Rightarrow \quad \int_S \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

a fonte de circulação do campo elétrico
é derivada temporal do campo magnético

Da mesma forma, mas agora para equação de Ampère-Maxwell:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS \quad \therefore \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS$$

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

as fontes de circulação do campo magnético são as densidades de corrente de condução, $\vec{j}$, e de deslocamento $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$

Equação da Continuidade

Para encontrar esta equação basta tomar a divergência da equação de Ampère-Maxwell e utilizar a lei de Gauss, como segue:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}.$$

Esta equação corresponde à lei dos nós, de Kirchoff, para circuitos elétricos.

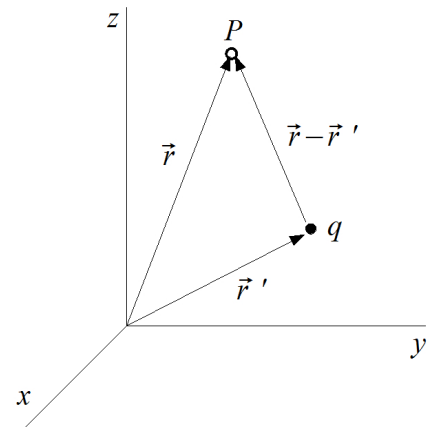
Exercício: Verificar a primeira equação de Maxwell para o campo elétrico de uma carga pontual, a partir da lei de Coulomb.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}; \quad \rho_q = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$



(Note que a função δ em três dimensões tem dimensão de L^{-3} .)

Potenciais Escalar e Vetor

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, podemos sempre representá-lo como o rotacional de outra função vetorial, $\vec{A}(x, y, z)$, ou seja,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. A grandeza vetorial $\vec{A}$ desempenha um papel fundamental no Eletromagnetismo e é denominada Potencial Vetor.

Por outro lado, utilizando a lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \therefore \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Este resultado implica que a função vetorial $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ pode ser obtida do gradiente de uma função escalar $\phi(x, y, z)$, ou seja,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Portanto

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

onde ϕ é denominado o Potencial Escalar. A vantagem de utilizar esta representação é fácil de apreciar. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ envolvem seis variáveis, três componentes de $\vec{E}$ e três de $\vec{B}$. A representação em termos de potenciais mostra que essas seis variáveis podem ser obtidas de apenas quatro, ϕ e as três componentes de $\vec{A}$!

Eletrostática

Griffths; Cap. 2

O livro texto inicia o estudo de eletrostática a partir da Lei de Coulomb para uma carga pontual. Nós vamos evitar esses assuntos mais básicos, que já foram bem vistos em Física III, e nos concentrar nos tópicos mais avançados.

Eletrostática significa que as cargas que produzem o campo estão imóveis no referencial do laboratório e não variam com o tempo, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \vec{j} = 0$$

Então as equações de Maxwell ficam

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad e \quad [\nabla \cdot \vec{B}, \nabla \times \vec{E}, \nabla \times \vec{B}] = 0$$

e, em termos de potenciais,

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$$

Lei de Gauss na Forma Integral

Como acabamos de ver, integrando a primeira equação de Maxwell em um volume V encerrado por uma superfície S , temos

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau$$

Utilizando o Teorema de Gauss, obtemos a Lei de Gauss na forma integral

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}}; \quad q = \int_V \rho dV$$

Vale ressaltar que a lei de Gauss na forma integral é sempre válida. No entanto, ela somente é útil para calcular o campo elétrico quando argumentos sobre a simetria do sistema nos permite escolher uma superfície em que $\vec{E}$ seja constante nas partes em que $\vec{E} \cdot \hat{n} \neq 0$, variando somente nas partes em que $\vec{E} \perp \hat{n}$. O livro apresenta vários exemplos e problemas sobre aplicações da Lei de Gauss. Como esses exemplos já foram vistos exaustivamente em Física III, vou discutir somente exemplos interessantes e não triviais.

Exemplo 2.4: Plano infinito com densidade de carga superficial σ uniforme. Para resolver este tipo de problema, o primeiro passo é sempre utilizar argumentos de simetria para determinar a direção de $\vec{E}$ e como deve variar com as coordenadas.

Feito isto, escolhemos uma superfície fechada de Gauss tal que, nas faces onde $\vec{E}$ varia, tenhamos $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, e nas faces onde $\vec{E} \cdot \hat{n} \neq 0$, $|\vec{E}|$ seja constante. Nem sempre é possível encontrar tal superfície.

No caso da placa, considerando dois elementos de carga quaisquer, vemos que os campos elétricos por eles produzidos, num eixo vertical intermediário entre eles, são tais que suas componentes perpendiculares à placa se somam.

Então, como superfície de Gauss tomamos o cilindro perpendicular ao plano da placa. Pela Lei de Gauss, temos

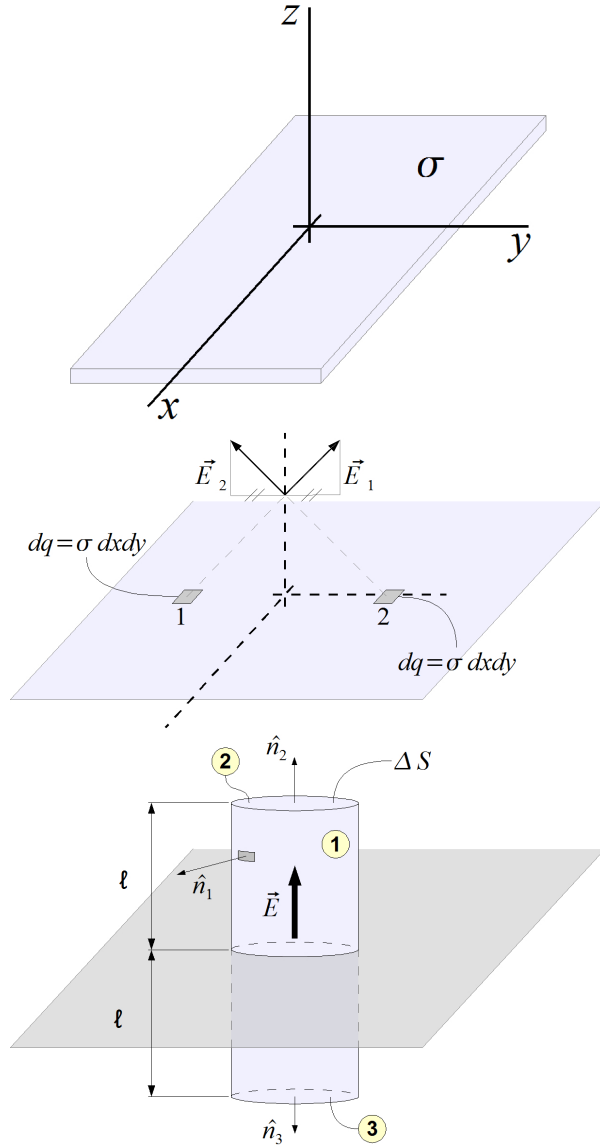
$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dS$$

Mas $\vec{E} \cdot \hat{n}_1 = 0$; $\vec{E} \cdot \hat{n}_2 = \vec{E} \cdot \hat{n}_3 = E$, já que ambas as bases (S_2 e S_3) estão equidistantes do plano da placa e, pelo argumento de simetria, $E_2 = E_3 = E$. Então

$$E\Delta S + E\Delta S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S \quad \therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

O sentido do campo é sempre apontando para fora da placa (para $\sigma > 0$); portanto

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}}$$



Consequência: Campo devido a carga superficial em um condutor ideal. Naturalmente o cálculo é o mesmo; mas, dentro do condutor perfeito o campo elétrico tem que ser nulo. Portanto

$$\vec{E}_{cond} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Mesmo que a superfície não seja plana, este resultado é válido bem próximo à superfície.

Vamos agora ver um exemplo em que aparentemente não há simetria, mas a Lei de Gauss pode ainda ser usada com vantagem.

