

PCS3115: Sistemas Digitais I

Síntese de Circuitos Combinatórios Minimização e Karnaugh

Seção 4.34 e 4.3.5 do livro-texto

2018/1

1

Minimização de Circuitos Combinatórios

- **Objetivo:** Obter solução mais econômica!
 - importante: critério de economia?
 - Custo, tempo, temperatura, etc
 - Varia no tempo
- Critérios possíveis:
 - Minimização do número de literais da função de chaveamento.
 - Minimização do número de interconexões entre as portas.
 - Minimização do número de pinos do circuito integrado a ser eventualmente construído.
- Maioria das estratégias baseada em T10

$$(T10) X \cdot Y + X \cdot Y' = X$$

$$(T10') (X+Y) \cdot (X+Y') = X$$

Não dependem de Y

→ combinação

2

Mapas de Karnaugh

- Representação gráfica equivalente à Tabela Verdade de uma função lógica.

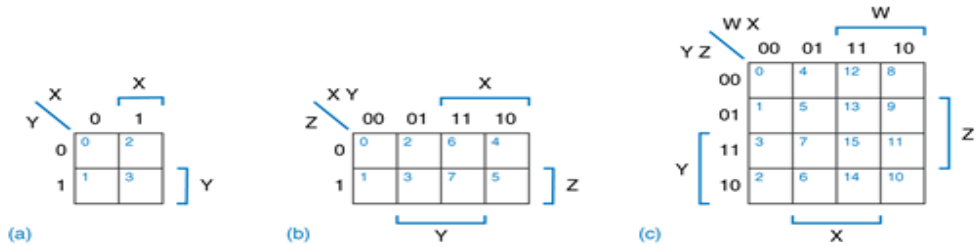


Figure 4-26

Karnaugh maps: (a) 2-variable; (b) 3-variable; (c) 4-variable.

Sequências de forma a haver apenas um bit diferente entre linhas e colunas adjacentes (Gray)

3

Mapas de Karnaugh

- Representação de uma função lógica:
 - Valores 0 e 1 associados a cada célula.

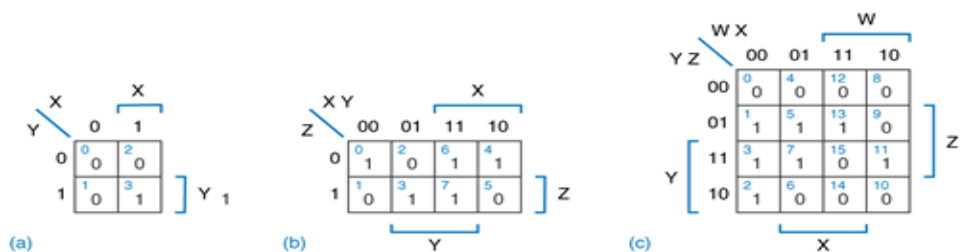


Figure 4-27

Karnaugh map for logic functions: (a) $F = \Sigma_{X,Y}(3)$; (b) $F = \Sigma_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$; (c) $F = \Sigma_{W,X,Y,Z}(1,2,3,5,7,11,13)$.

4

Definições

- Célula - É um mintermo ou um maxtermo.
- Células Adjacentes - Diferem apenas no valor de uma variável.
- Adjacências - Grupos (retangulares ou quadrados) de 2^n células adjacentes.

5

Mapa de Karnaugh e Mintermos

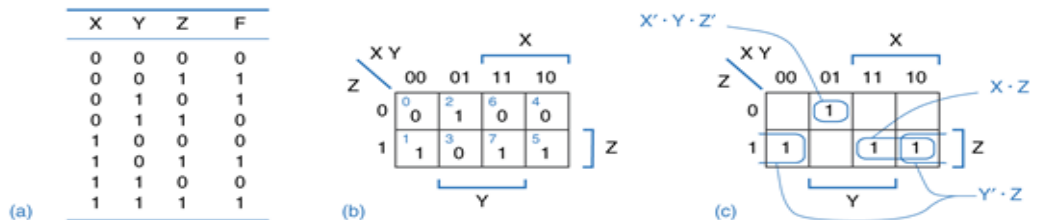


Figure 4-28

$F = \Sigma_{X,Y,Z}(1,2,5,7)$: (a) truth table; (b) Karnaugh map; (c) combining adjacent 1-cells.

É comum colocar apenas os "1" 's

6

Versão minimizada do exemplo

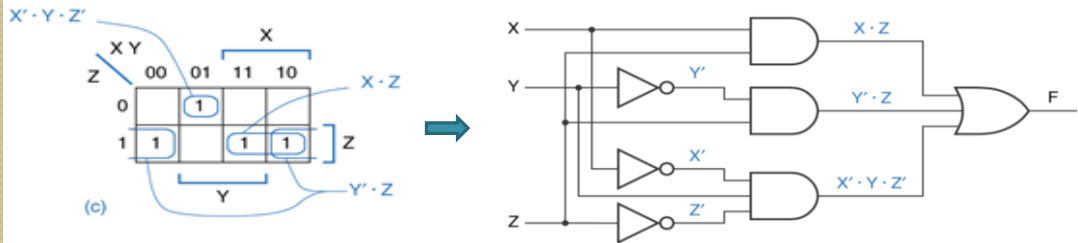


Figure 4-29
Minimized AND-OR circuit.

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4.
©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

7

Outro Exemplo

$$F = \sum_{X,Y,Z} (0,1,4,5,6)$$

$$\begin{aligned} F &= X' \cdot Y' \cdot Z' + X' \cdot Y' \cdot Z + X \cdot Y' \cdot Z' + X \cdot Y' \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z' \\ &= [(X' \cdot Y') \cdot Z' + (X' \cdot Y') \cdot Z] + [(X \cdot Y') \cdot Z' + (X \cdot Y') \cdot Z] + X \cdot Y \cdot Z' \\ &= X' \cdot Y' + X \cdot Y' + X \cdot Y \cdot Z' \\ &= [X' \cdot (Y') + X \cdot (Y')] + X \cdot Y \cdot Z' \\ &= Y' + X \cdot Y \cdot Z' \end{aligned}$$

8

Outro exemplo

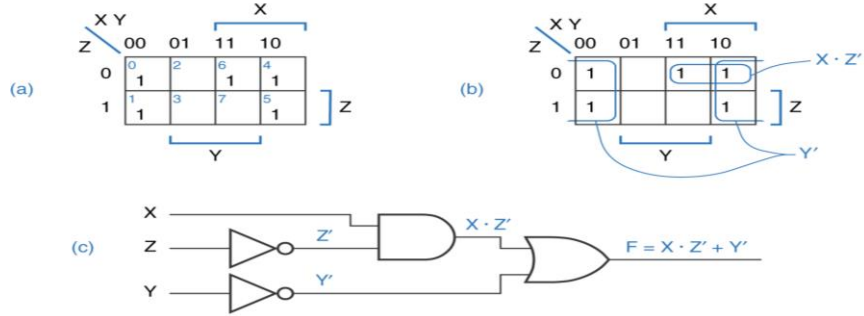


Figure 4-30 $F = \Sigma_{X,Y,Z}(0,1,4,5,6)$: (a) initial Karnaugh map; (b) Karnaugh map with circled product terms; (c) AND/OR circuit.

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4. ©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

O Detector de números primos...:

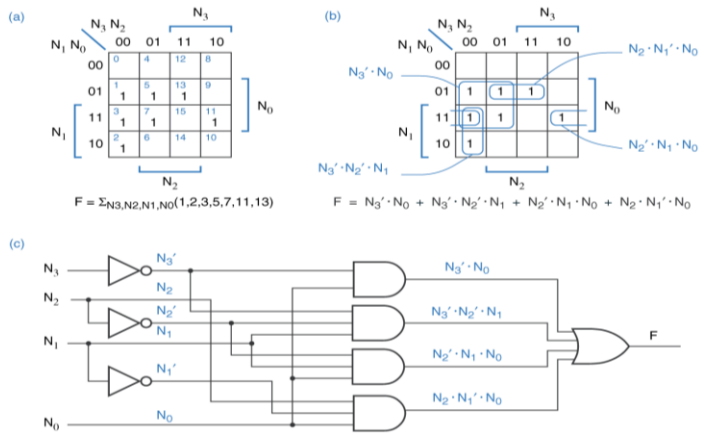
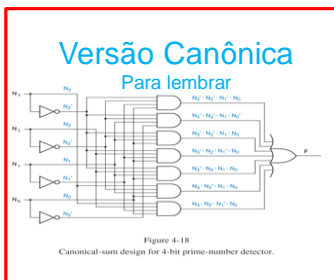


Figure 4-31 Prime-number detector: (a) initial Karnaugh map; (b) circled product terms; (c) minimized

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4. ©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

Exercício 1

- Determinar o menor conjunto de adjacências que cubra (contenha) todos os mintermos, e escrever a SOP.

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

11

Exercício 1 – solução

- Determinar o menor conjunto de adjacências que cubra (contenha) todos os mintermos, e escrever a SOP.

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

$$F = X_2 \sim X_1 + \sim X_2 X_1$$

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$$F = X_2 + X_3 \sim X_1$$

	x_3x_2			
x_1	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

$$F = \sim X_2$$

12

Exercício 2

- Determinar o menor conjunto de adjacências que cubra (contenha) todos os mintermos, e escrever a SOP.

	x_4x_3			
	00	01	11	10
x_2x_1				
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

	x_4x_3			
	00	01	11	10
x_2x_1				
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	1

13

Exercício 2 - solução

- Determinar o menor conjunto de adjacências que cubra (contenha) todos os mintermos, e escrever a SOP.

	x_4x_3			
	00	01	11	10
x_2x_1				
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

$$F = \neg x_3 \neg x_2 + \neg x_3 x_2 \neg x_1 + \neg x_4 x_3 x_1$$

	x_4x_3			
	00	01	11	10
x_2x_1				
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	1

$$F = \neg x_2 x_1 + \neg x_4 x_1 + x_4 \neg x_3 x_2$$

14

Implicação

- $P(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow F(X_1, X_2, \dots, X_n)$
 - Se $P = 1$ então $F = 1$
- F pode ser 1 para outras entradas:
 - F inclui P ,
 ou
 - F cobre P

15

Implicante Primário

- Implicante primário de $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$
 - Termo $P(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow F$
 - Se qualquer variável for tirada de P , o termo do produto resultante não implica F .
- A soma mínima: \sum implicantes primários
- Soma completa: \sum todos implicantes primários

16

Exemplo: Dois implicantes primários

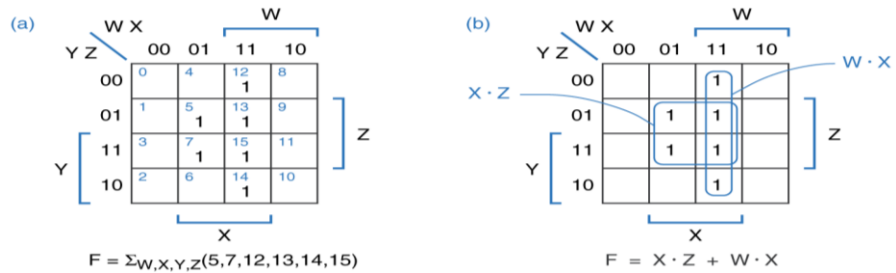


Figure 4-32

$F = \Sigma_{W,X,Y,Z}(5,7,12,13,14,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants.

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4.
©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

17

Implicante Primário Essencial

- Célula unitária distinta
 - uma combinação que é coberta por somente um implicante primário
- Implicante Primário Essencial
 - Cobre uma ou mais células unitárias distintas

18

3 essenciais em 5 implicantes primários

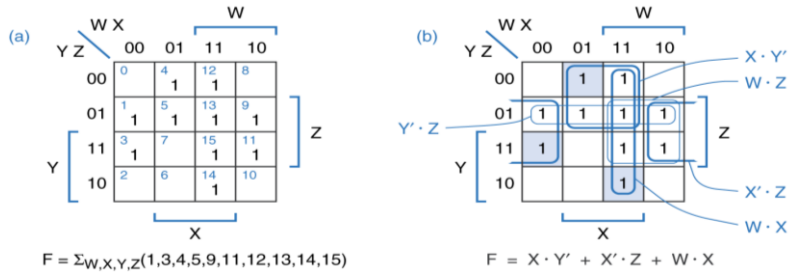


Figure 4-33

$F = \Sigma_{W,X,Y,Z}(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants and distinguished 1-cells.

Critério de escolha: $\sim YZ$ e WZ já estavam incluídos nos demais

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4. ©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

4 essenciais em 4 implicantes primários

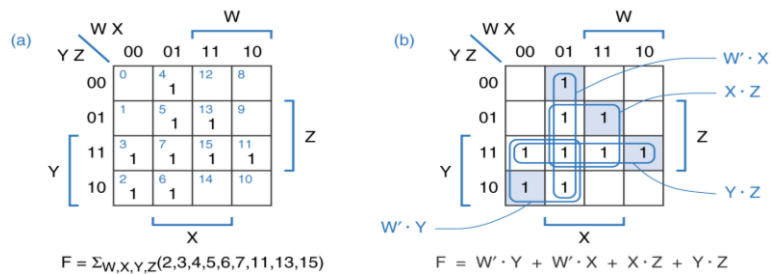


Figure 4-34

$F = \Sigma_{W,X,Y,Z}(2,3,4,5,6,7,11,13,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants and distinguished 1-cells.

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4. ©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

Sobra de célula não coberta

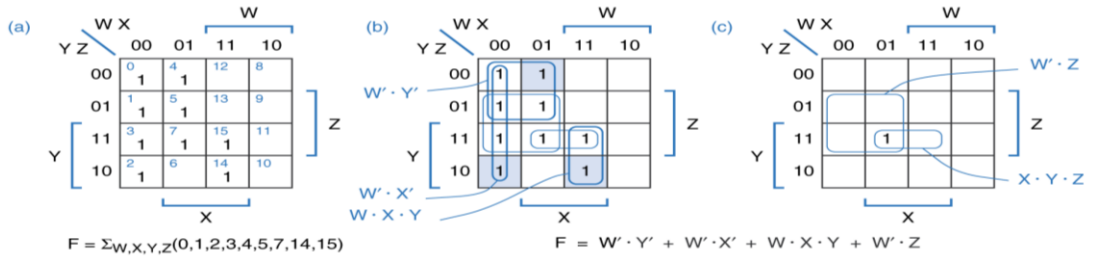


Figure 4-35

$F = \Sigma_{w,x,y,z}(0,1,2,3,4,5,7,14,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants and distinguished 1-cells; (c) reduced map after removal of essential prime implicants and covered 1-cells.

Escolha: $\sim WZ$ (que tem menos entradas que XYZ)

Sobra de célula não coberta

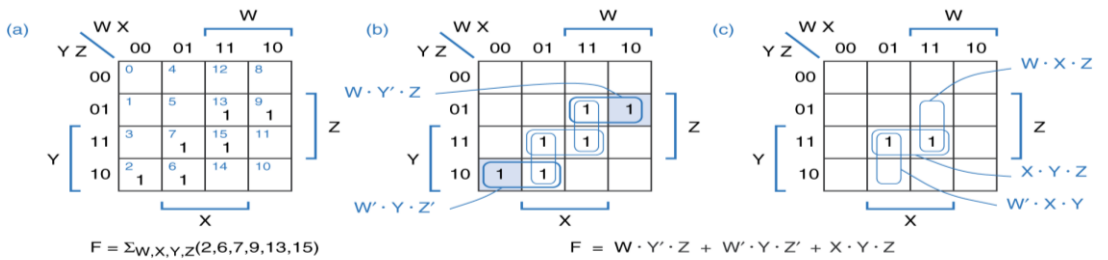


Figure 4-36

$F = \Sigma_{w,x,y,z}(2,6,7,9,13,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants and distinguished 1-cells; (c) reduced map after removal of essential prime implicants and covered 1-cells.

Escolha: XYZ **ECLIPSA** as duas outras por ser suficiente e mais barata
XYZ é um prime impicante secundário (!)

Sem regra clara: tentativa e erro

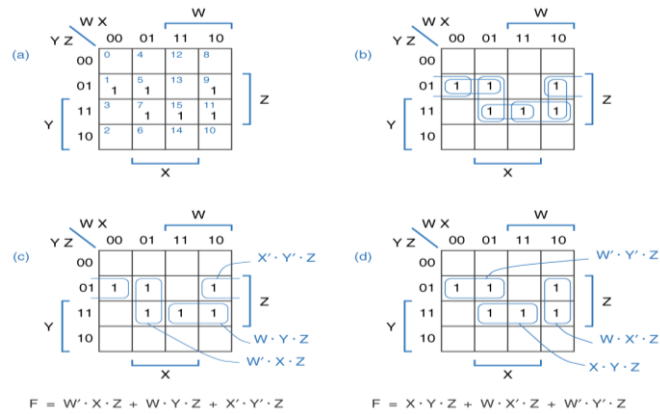


Figure 4-37

$F = \sum_{W,X,Y,Z}(1,5,7,9,11,15)$: (a) Karnaugh map; (b) prime implicants; (c) a minimal sum; (d) another minimal sum.

From *Digital Design: Principles and Practices*, Fourth Edition, John F. Wakerly, ISBN 0-13-186389-4.
©2006, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

23

X – Don't Care !

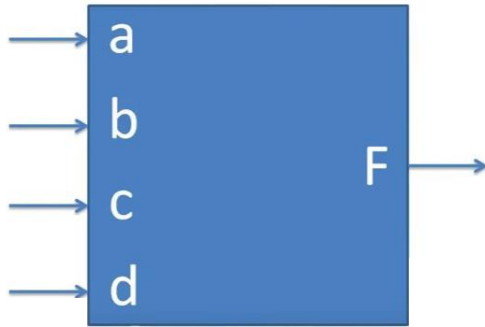
Para 2 de abril

- Exemplo
- Faça um circuito que detecte números ímpares com entrada em **BCD**.
- Entradas: 0 a 9 (binário 4 bits)
- Saída $F=1$ se ímpar

ECE Illinois <<https://youtu.be/95xLK7gHGIE>>

24

Exemplo 2



	a	b	c	d	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Exemplo 3

	a	b	c	d	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

Exemplo 4

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

 $a'd$ $b'c'd$

Exemplo 5

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	X	X	X	X
	10	0	1	X	X

Exemplo 6

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

$$F = d$$

Exemplo 7

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	X	X	X	X
	10	0	1	X	X

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

Tarefas

- Leitura das seções 4.3.5 (continuação) e 4.3.6.
- Exercícios do Capítulo 4 do livro-texto
 - ao menos *drill problems* 4.14 a 4.19)
 - Exercícios 4.47 a 4.64.