

O He Líquido

Caso de 1 mol de He em CNTP:

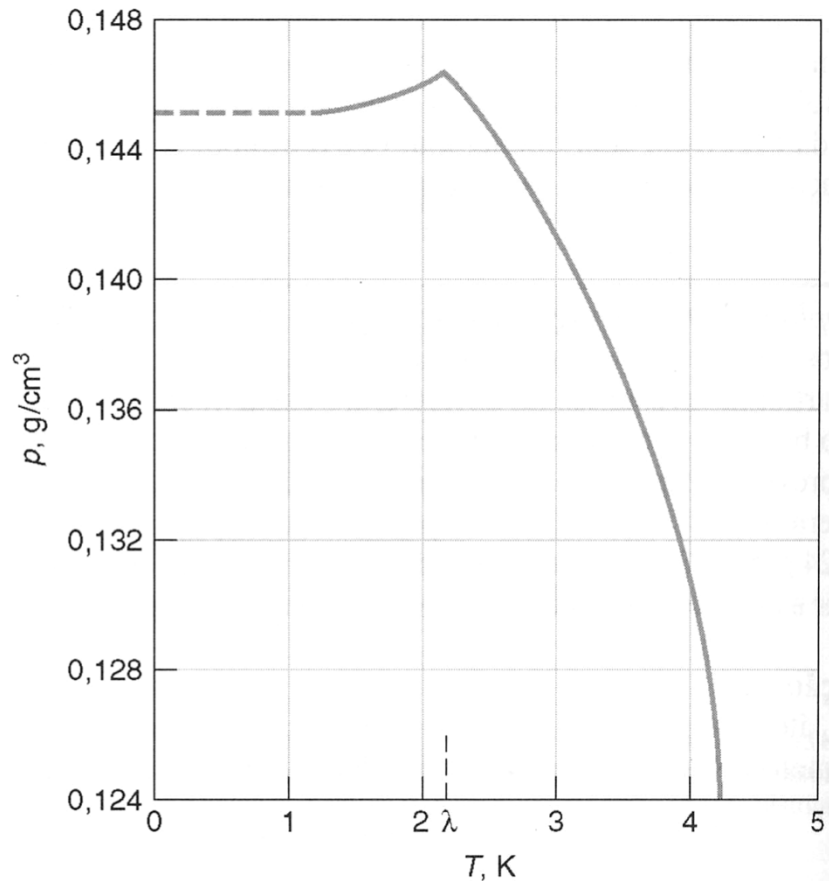
$$\begin{aligned} e^{-\alpha} &= \frac{h^3 c^3 N}{(2\pi m c^2 k T)^{3/2} V} = \frac{(1,24 \text{ keV} \cdot \text{nm})^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{(2\pi \cdot 4 \text{ GeV} \cdot 0,025 \text{ eV})^{3/2} \cdot 22,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3} = \\ &= \frac{(1,24 \text{ eV} \cdot \text{m})^3 \cdot 6 \cdot 10^5}{(2\pi \cdot 4 \text{ eV} \cdot 25 \text{ eV})^{3/2} \cdot 22,4 \text{ m}^3 \cdot 10^6} = \frac{0,051}{(628)^{3/2}} = \frac{0,051}{1,5 \cdot 10^4} \approx 10^{-6} \ll 1 \end{aligned}$$

Portanto a descrição do He em CNPT é OK com a distribuição de Boltzmann. Mas vejamos o que acontece com o He líquido, a 4,2 K, cuja densidade é de 0,124 g/cm³:

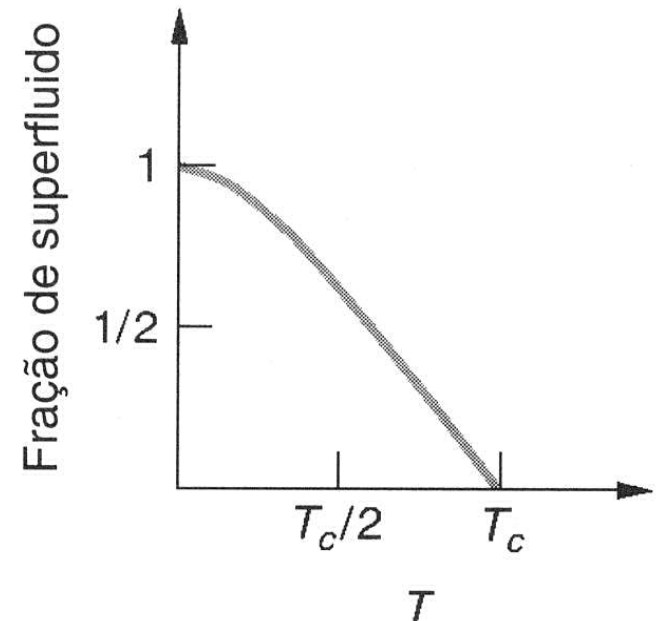
$$\frac{N}{V} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{4 \text{ g/mol}} \cdot 0,124 \text{ g/cm}^3 \cdot (10^2 \text{ cm/m})^3 = 1,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} &= \frac{(1,24 \text{ keV} \cdot \text{nm})^3 \cdot 1,9 \cdot 10^{28}}{(2\pi \cdot 4 \text{ GeV} \cdot 0,0004 \text{ eV})^{3/2}} = \\ &= \frac{(1,24 \text{ eV} \cdot \text{m})^3 \cdot 1,9 \cdot 10^{10}}{(2\pi \cdot 4 \text{ eV} \cdot 4 \text{ eV} \cdot 10^5)^{3/2}} = \frac{3,6 \cdot 10^{10}}{3,2 \cdot 10^{10}} \approx 1 \end{aligned}$$

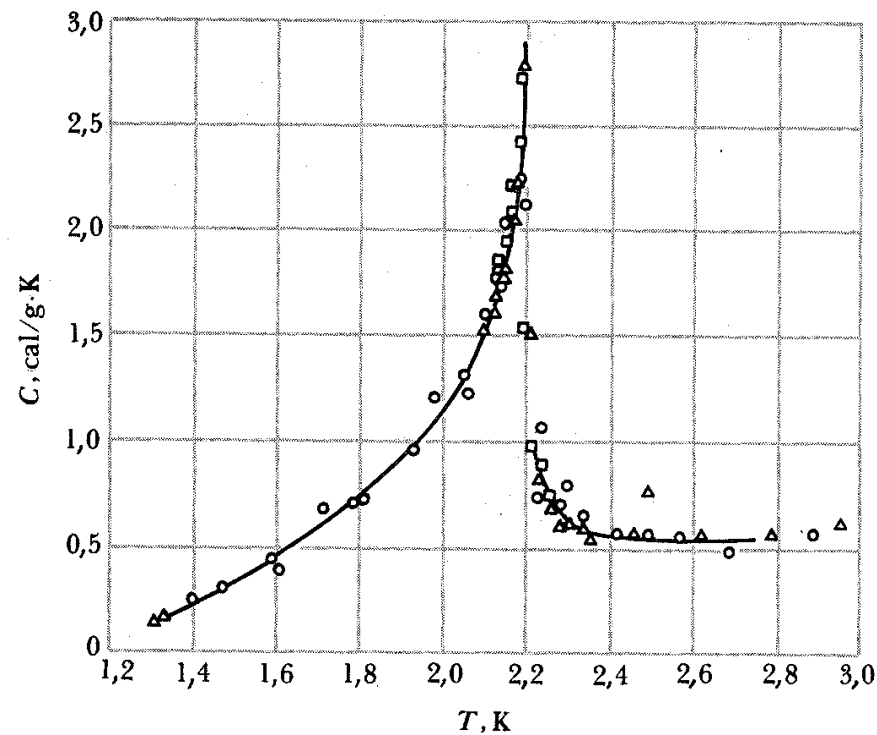
F. London (1938): tratar o He líquido como um gás ideal que obedece a distribuição de Bose-Einstein. Em 1924, Kamerlingh-Onnes e Boks haviam medido a densidade do He em função de T e observado uma anomalia:



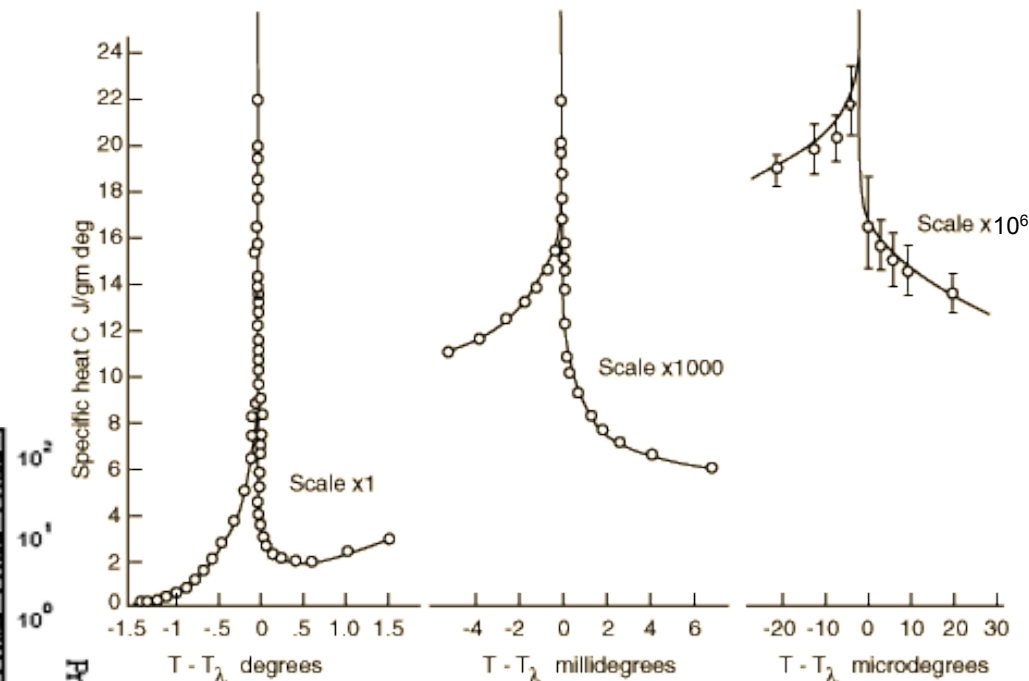
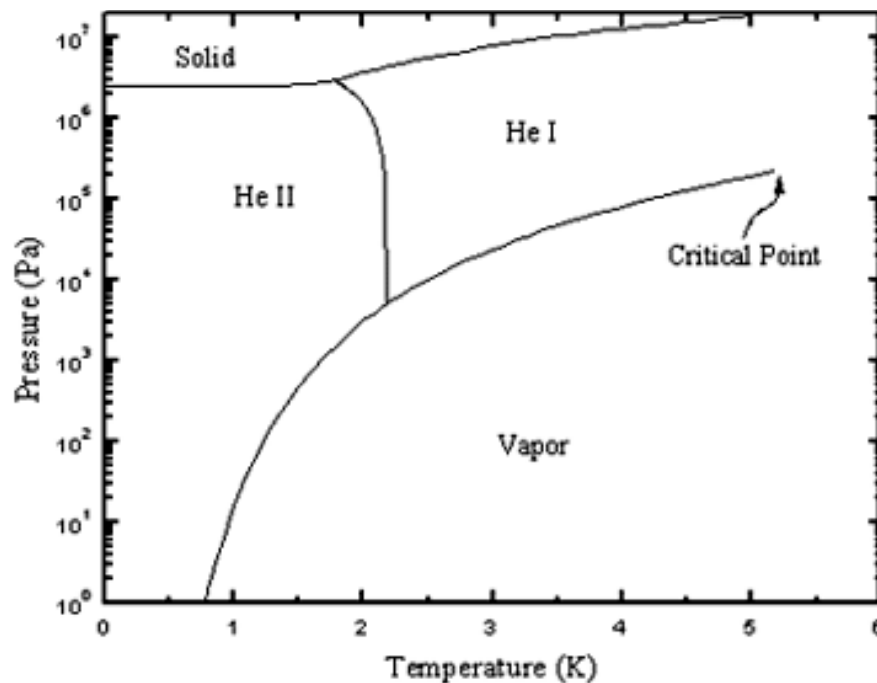
Keesom e Wolfke (1928): transição de fase em 2,17 K ($\text{He1} \rightarrow \text{He2}$). O He2 seria composto por 2 fluidos: uma fração normal, com as mesmas características do He1 e uma fração superfluida. Na fase superfluida, todos os átomos de He estariam no mesmo estado quântico.



Quanto menor a T , maior a fração do estado superfluido.

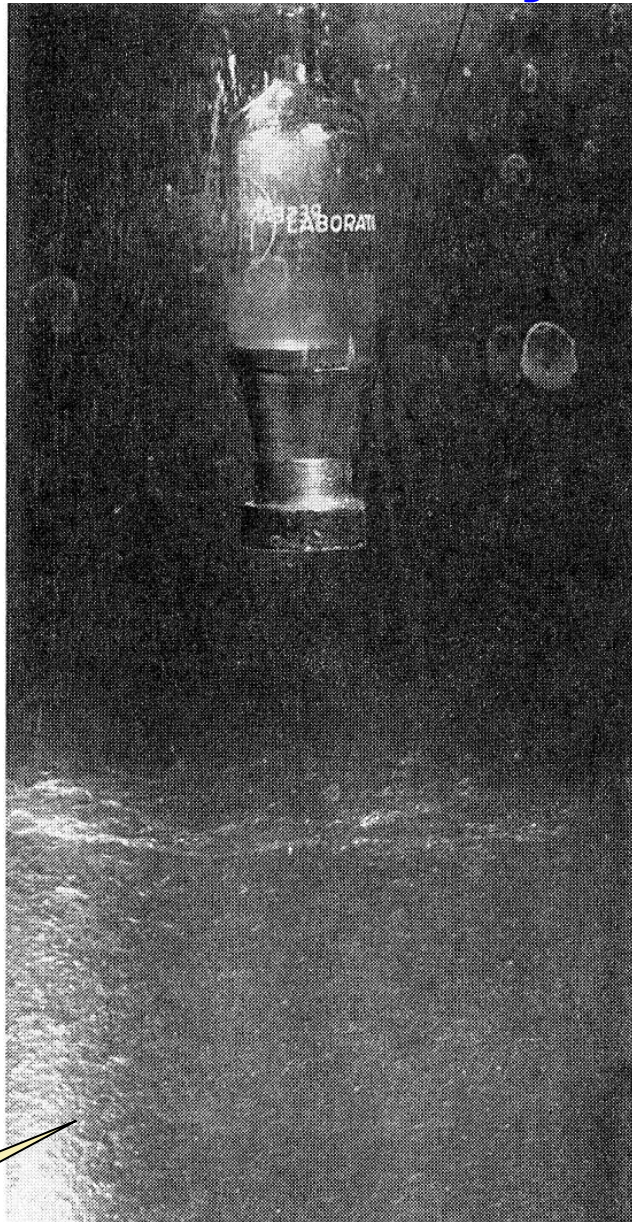


A transição de fase He1 $\rightarrow$ He2 é clara na curva do calor específico em função da temperatura. O ponto de transição é conhecido como ponto λ :

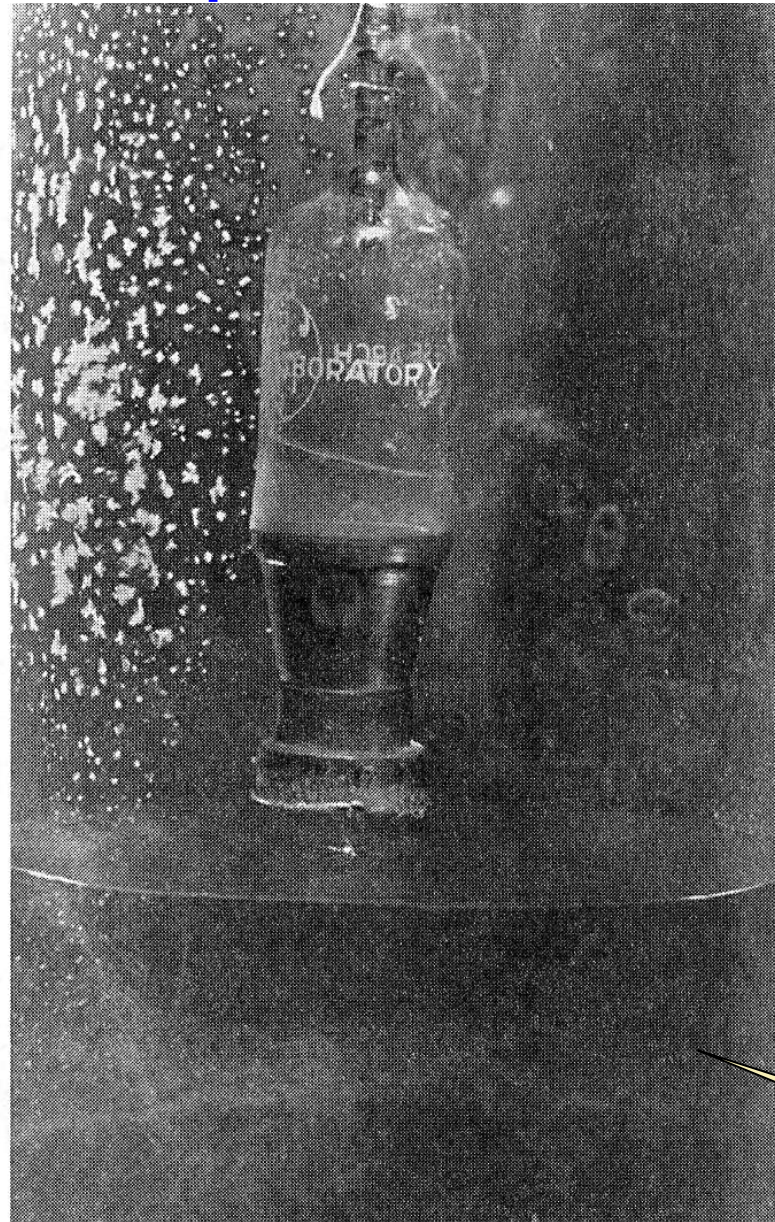


O He líquido ferve na fase He1 e deixa de fazê-lo na fase He2, pois a viscosidade $\rightarrow 0$.

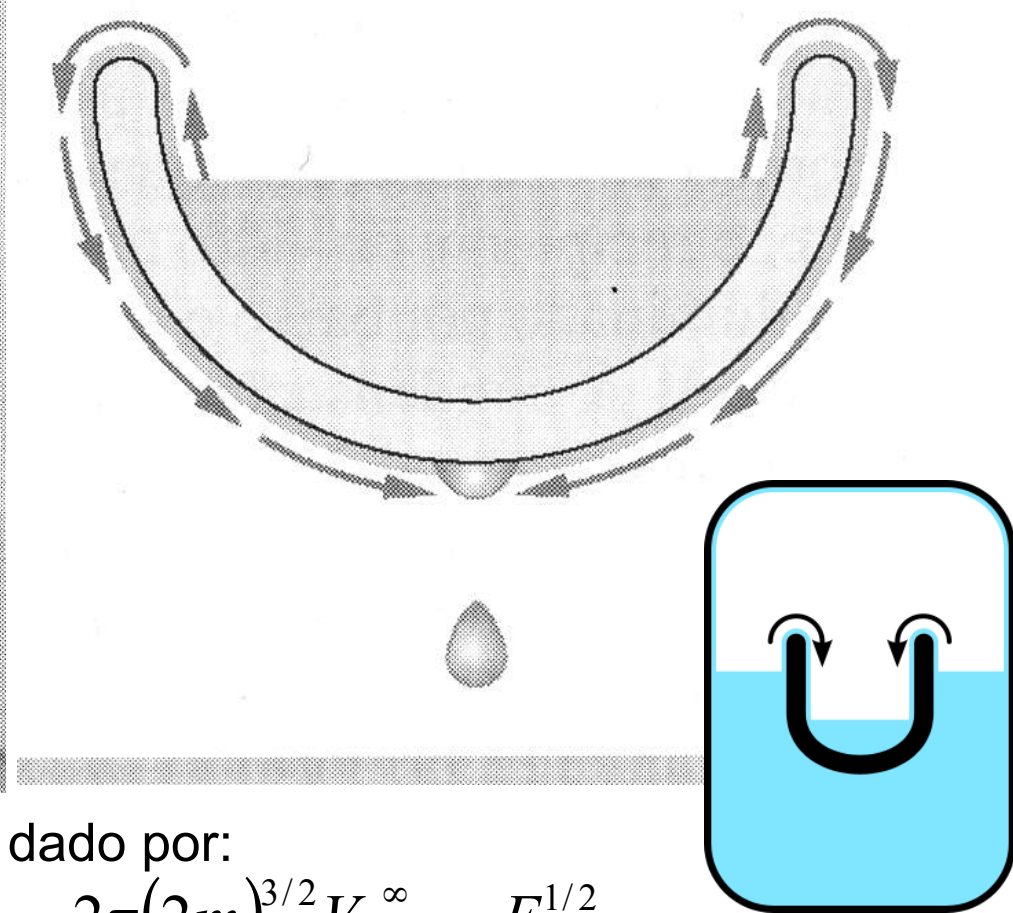
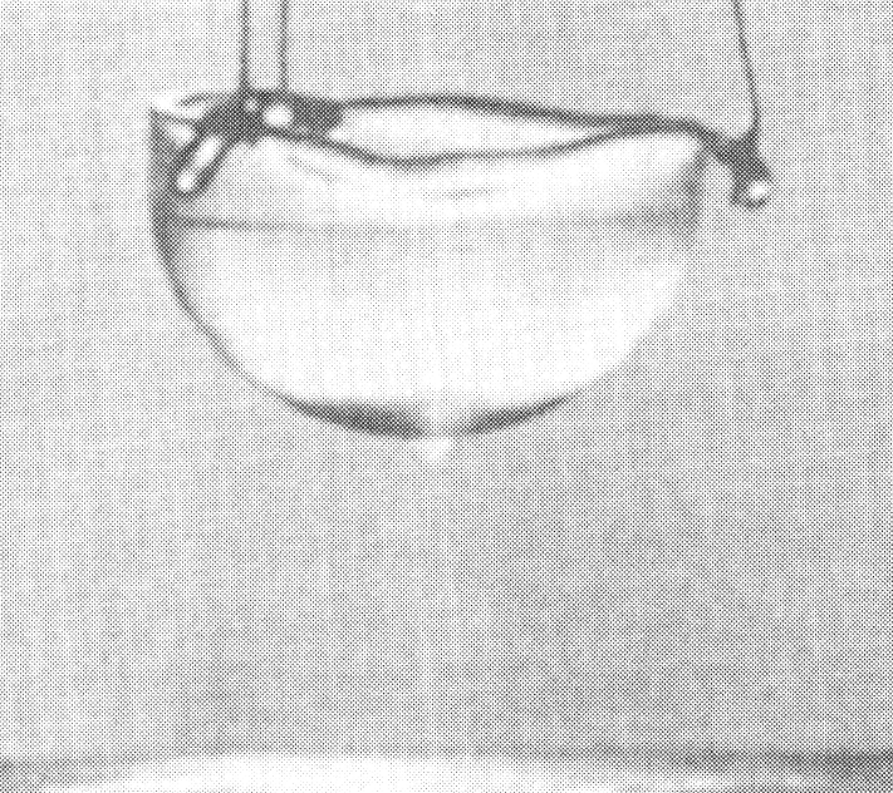
Transição de He1 para He2



He1



He2



Vimos que o número de partículas é dado por:

$$N = \int_0^{\infty} n(E) dE = \int_0^{\infty} g(E) f_{Bose}(E) dE = \frac{2\pi(2m)^{3/2} V}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{E^{1/2}}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} dE =$$

$$= \frac{2\pi(2mkT)^{3/2} V}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{\alpha} e^x - 1} dx \quad \text{com } x = E/kT$$

O problema com a nossa contagem de número de estados é que usamos uma distribuição contínua de energias. Quando E é grande, isso não é um problema, pois a densidade de estados é muito grande. Mas, quando $E \rightarrow 0$, temos problemas, pois, $g(E) \propto E^{1/2} \Rightarrow g(E) = 0$ se $E = 0$.

Isso não é um problema para um gás de férmions, onde cada estado só pode ser ocupado por 2 férmions de spins opostos. Ou seja, estaríamos ignorando 2 partículas em 1 mol. Mas, no caso de bósons, principalmente quando T é baixa, a probabilidade de haver muitos bósons no estado de energia mais baixa é muito grande e aí nossa contagem erra feio. Ou seja, nossa condição de normalização deixa de valer abaixo de uma temperatura crítica, T_C . Vamos então assumir a normalização como:

$$N = n_0 + \frac{2\pi(2mkT)^{3/2}V}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^\alpha e^x - 1} dx = n_0 + AV(kT)^{3/2} G(\alpha)$$

Com: $G(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^\alpha e^x - 1} dx$ Aí podemos discutir 2 limites:

1) Para α muito grande: $G(\alpha) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha}$; e 2) para $\alpha = 0$: $G(0) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612$

Quando $\alpha \sim 1/N$ ($e^\alpha \approx 1$) ele já é suficientemente pequeno para que possamos usar o resultado de $G(0)$ e determinar o número de partículas no estado fundamental:

$$n_0 = N - AV(kT)^{3/2} G(0) = N - AV(kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612$$

$$\text{Ou: } n_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] ; \text{ e } T_c = \frac{1}{k} \left(\frac{2N}{2,612 AV \sqrt{\pi}} \right)^{2/3} = \frac{2\pi\hbar^2}{km} \left(\frac{\rho}{2,612} \right)^{2/3}$$

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad \text{No caso do He: } T_c = \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{kmc^2} \left(\frac{1,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}}{2,612} \right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{2\pi(200 \text{ MeV} \cdot \text{fm})^2}{4 \text{ GeV} \cdot 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}} (7,27 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3})^{2/3} = \frac{2\pi \cdot 3,75}{8,6} \text{ K} = 2,74 \text{ K}$$

Comentar ^3He , $T_c = 2,7 \text{ mK}$

Abaixo dessa temperatura (na verdade 2,17 K), a fração de átomos no estado fundamental (com propriedades de superfluido) aumenta.

