$4^{\underline{a}}$ Série de Problemas - Entrega: Aula -17/06/15

$\boxed{\mathbf{1}}$ Segundo todas as evidências, o nosso universo sempre se expandiu - e continua se expandindo. A expansão é caracterizada por um "fator de escala" $a(t)$, que determina como a separação L entre quaisquer duas galáxias distantes muda com o tempo - ou seja, as distâncias entre objetos cosmológicos são proporcionais a $a(t)$. Esse fator de escala também afeta os comprimentos de onda da luz, ou seja, $\lambda \propto a(t)$: à medida que o tempo passa, uma onda de luz no universo em expansão vai se tornando cada vez mais "longa", enquanto sua frequência diminui pela mesma medida, de forma que é sempre válida a relação $c = \omega/k = \lambda\nu$.

Essa expansão do universo significa que, à medida que regredimos no passado, ele se torna cada vez mais denso e quente. Uma consequência disso é que, desde o início do universo (o "Big Bang") até uma determinada época, a densidade e a temperatura eram tão altos que nenhum átomo permanecia neutro - a intensa radiação, presente em todos os lugares na mesma medida, imediatamente ionizada os elétrons que porventura se ligavam a um núcleo atômico, Todos os prótons e elétrons estavam portanto livres, e não presos em átomos neutros.

Hoje sabemos que essa época, denominada "‘recombinação"e que marca o primeiro instante quando átomos neutros puderam se formar, se deu quando o universo tinha aproximadamente 300.000 anos de idade, e o fator de escala era 1000 vezes menor que ele é hoje, $a(t_{rec}) \approx 10^{-3} a(t_0)$. Durante a recombinação, à mediada que o universo se resfriou a densidade diminuiu, quase todos os elétrons livres (99.9%) foram capturados pelos núcleos atômicos de carga positiva, formando átimos neutros.

Considere cada onda plana $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ como correspondendo a um fóton (quantum de luz) de momento k e direções $\hat{k}$ arbitrárias, e assuma que a interação da radiação com os elétrons se dá através do espalhamento Thomson. Sabendo que hoje a densidade de elétrons livres é aproximadamente $n_e \propto 1m^{-3}$, calcule:

a) O caminho livre médio dos fótons na era atual.

b) O caminho livre médio dos fótons logo antes da era da recombinação, quando todos os elétrons era livres. (Lembre-se que, daquela época até hoje, os volumes aumentaram por um fator de 10^9. Como encontrar esse fator?)

c) O caminho livre médio dos fótons logo após a era da recombinação (Lembre-se que imediatamente após a recombinação apenas 0.1% dos elétrons estavam livres.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Considere um espalhamento de uma onda plana por uma esfera de raio a, sob a condição de contorno de que $\psi(r = a) = 0$. Assuma que a onda incidente tem frequência tal que $ka = 1/2$.

a) Calcule as fases δ_0, δ_1 e δ_2.

b) Obtenha as seções de choque diferenciais para $l = 0, 1$ e 2. Faça um gráfico das seções de choque diferenciais como função de θ.

c) Obtenha a seção de choque total, somando apenas as contribuições até $l = 3$. Faça uma estimativa do erro que você incorreria ao limitar sua soma até $l = 2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Considere o espalhamento de uma onda plana por uma calota esférica de raio a - ou seja, uma esfera cortada ao meio. Tome uma calota que está "'virada para baixo", assim a superfície da calota é descrita por $\{r = a, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}$ e $\{0 \leq r \leq a,\ \theta = \pi/2\}$.

a) Mostre que a aplicação cuidadosa das condições de contorno de Dirichlet ($\psi = 0$ na superfície do condutor) implica que as fases δ_l são idênticas às fases no caso de uma esfera inteira, exceto que no caso da semi-esfera $\delta_l = 0$ se l for par. Explique por que isso ocorre.

b) Qual a diferença entre espalhamento por uma semi-esfera “virada para baixo” e o problema do espalhamento por uma semi-esfera “virada para cima”? Como as fases δ_l mudam de um caso para o outro? As seções de choque também são alteradas?

c) Obtenha a seção de choque total do espalhamento pela semi-esfera quando $ka = 1/2$, somando apenas as contribuições até $l = 3$. Compare com o resultado da esfera do item 1.c.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Vamos imaginar problema de propagação e espalhamento de ondas duas dimensões espaciais - o plano (x, y). Considere a onda incidente, de frequência ω, se propagando na direção $+x$, ou seja, $\psi_i = Ae^{ikx}$.

a) Escreva a equação de onda em coordenadas polares, $(x, y) \to (r, \theta)$. (Dica: comece com a equação de onda em três dimensões, em coordenadas cilíndricas, e jogue a coordenadas z fora).

b) Mostre que as auto-funções radiais dessa equação são funções de Bessel normais, de índices m inteiros - em contraste com o caso tridimensional em coordenadas esféricas, em que temos como auto-funções radias as funções de Bessel esféricas.

c) Expresse a onda plana incidente em termos de funções radiais e angulares.

d) Mostre que a onda radial livre (o correspondente ao Ae^{ikr}/r no caso de três dimensões espaciais) é agora dada por $Ae^{ikr}/\sqrt{r}$. Pensando em termos da potência, qual a explicação para esse fator $1/\sqrt{r}$ em duas dimensões, comparando com $1/r$ que temos três dimensões?

e) Vamos supor que a onda incidente é espalhada por um disco de raio a, e vamos usar as condições de contorno de Dirichlet, ou seja, $\psi_T(r=a)=0$. Encontre as diferenças de fase δ_m para $m=0,1,2$ no caso $ka \ll 1$.

Neste exercício você tem que utilizar algumas propriedades das funções de Bessel, em particular:

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z), \qquad N_{-m}(z) = (-1)^m N_m(z)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi + iz\,cos\varphi} = 2\pi i^{|m|} J_{|m|}(z)$$

Limites assintóticos $z \to \infty$:

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} cos\left[z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$N_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} sen\left[z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right].$$

Limites assintóticos $z \to 0$:

$$J_m(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \qquad (m \geq O),$$

$$N_0(z) \approx \frac{2}{\pi} J_0(z)\, ln\frac{\pi}{2},$$

$$N_m(z) \approx -\left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \frac{(m-1)!}{\pi} \qquad (m \geq 1).$$

5 Considere o experimento de Young - duas fendas muito finas e muito longas, separadas por uma distância d na vertical. Considere uma onda plana incidente.

a) Utilizando o princípio de Huygens, calcule o envelope exato da curva de intensidade. Assuma apenas que a onda é plana, e que incide normalmente.

b) Se a onda incide num ângulo α no plano onda estão localizadas as fendas, o que muda na fase da onda?

c) Suponha que o anteparo é colocado à uma distância z do plano das fendas, e que podemos variar essa distância, trazendo o plano mais para a frente ou mais para trás. À medida que o anteparo é movido continuamente na direção z, as regiões de interferência construtiva e destrutiva se movem continuamente na direção y (vertical). Mostre que os pontos de intensidade máxima (interferência construtiva) e de intensidade mínima (interferência destrutiva) descrevem hipérboles no plano (x, y).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Considere um grid (ou grating) de difração: em vez do experimento de Young, com duas fendas separadas por uma distância d, temos um número N de fendas muito finas, todas separadas pela mesma distância Δx. Assuma que a onda incidente é plana e que o anteparo está a uma distância fixa $L \gg N\Delta x$ do grid.

a) Suponha que a intensidade de cada uma das ondas esféricas que emana das fendas é a mesma, $\langle|\psi|^2\rangle_t = A^2/2$. Mostre que o padrão de interferência (a intensidade da luz refratada) como função de x no anteparo é:

$$I = N\frac{A^2}{2} + A^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) cos(m\Delta\phi)$$

onde $\Delta\phi = k\Delta x \, sen\theta = k\Delta x \, x/L$.

b) Mostre que a expressão acima reduz a:

$$I = \frac{A^2}{2} \frac{sen^2(N\Delta\phi/2)}{sen^2(\Delta x/2)}$$

Dica: utilize as seguintes identidades trigonométricas:

$$\sum_{m=1}^{N} cos(m\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{sen(N+1/2)\alpha}{2sen\alpha/2}$$

$$\sum_{m=1}^{N} m \, cos(m\alpha) = \frac{(N+1)sen(N+1/2)\alpha}{2sen\alpha/2} - \frac{1-cos(N+1)\alpha}{4sen^2\alpha/2}$$

c) Faça um gráfico de $I(\Delta\phi)$ para $N = 3$ e $N = 4$. Você deve notar que, entre os locais de intensidade máxima há vários locais onda a intensidade é zero! Qual a explicação para isso?

d) Mostre que, para N arbitrariamente grande, as franjas principais se tornam arbitrariamente finas e brilhantes, mas de tal modo que a luminosidade total permanece constante.

e) O que acontece quando você toma $N \to \infty$ e $\Delta x \to 0$, mas com $N\Delta x = D$ constante? Dica: essa situação não corresponde mais a fendas infinitamente finas, mas a uma fenda de abertura finita D. Note que a intensidade da onda agora é distribuída proporcionalmente à altura. Distribuindo a intensidade da onda incidente pelas N fendas, temos que a intensidade total é (antes de tomar o limite):

$$I_{total} = \frac{I(\Delta\phi)}{N} \frac{\Delta x}{D}$$

f) Calcule o padrão de interferência causado por uma fenda de altura finita D à la Fraunhofer. Compare com o resultado obtido acima.

$\boxed{7}$ Considere a difração criada pela incidência de uma onda plana monocromática num retângulo de largura vertical $2a$ e largura horizontal $2b$ cortado num anteparo localizado no plano (x,y). A intensidade da onda resultante é projetada num anteparo a uma distância $L \gg a, b$.

a) Primeiro,considere uma abertura na forma de um retângulo acima. Encontre o padrão de interferência como função dos ângulos α e β, onde α é medido desde o centro da abertura na direção vertical, e β é o ângulo na horizontal.

b) Agora, troque a abertura por um obstáculo na forma desse retângulo. Encontre o padrão de interferência. Verifique o princípio de Babinet nesse caso - ou seja, que $\psi_\sigma + \psi_\Sigma = \psi_i$, onde σ é o retângulo, Σ é a área do plano (x,y) menos o retângulo, e ψ_i é a onda incidente.

c) Deduza a seção de choque diferencial no caso do obstáculo retangular, utilizando coordenadas polares. Em seguida calcule a seção de choque total e compare com a seção de choque geométrica desse obstáculo.