Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 19

Expansão da Onda Plana em Ondas Esféricas Parciais

Anteriormente foi mostrado que a parte dependente do raio r da função de Green é escrita como:

$$g_l\left(r,r'\right) = -ikj_l\left(kr_<\right)h_l^{(1,2)}\left(kr_>\right),$$

portanto, a solução geral é:

$$G\left(\vec{x},\vec{x}\,'\right) = -ik\sum_{lm} j_l\left(kr_<\right)h_l^{(1,2)}\left(kr_>\right)Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$$

Aplicando as condições de contorno no infinto, isto é, $|\vec{r}\,'| \to \infty$, a onda que emergente da interação com o objeto será:

$$r' \to r_>; \qquad r \to r_<; \qquad |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\,\hat{n}\cdot\hat{n}'} \approx r' - r\,\hat{n}\cdot\hat{n}';$$

$$h_l^{(1)}\left(kr'\right) \approx (-i)^{l+1}\frac{e^{ikr'}}{kr'},$$

onde os versores em coordenadas esféricas de $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ são, respectivamente, $\hat{n}$ e $\hat{n}'$.

Como vimos anteriormente neste curso,a função de Green é:

$$G\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Aplicando o limite indicado logo acima e igualando as duas formas de $G\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$, e generalizando para $\hat{n}' \to \hat{k}$, encontramos:

$$e^{-ik(r\hat{n})\cdot(r'\hat{n}')} = e^{-ikr\, cos\theta} = 4\pi \sum_{lm} (-i)^l\, j_l\,(kr)\, Y^*_{lm}(\hat{k})\, Y_{lm}(\hat{n})$$

onde θ é o ângulo entre $\hat{k}$ e $\hat{n}$, portanto,

$$\boxed{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{lm} (-i)^l\, j_l\,(kr)\, Y^*_{lm}(\hat{k})\, Y_{lm}(\hat{n})}$$

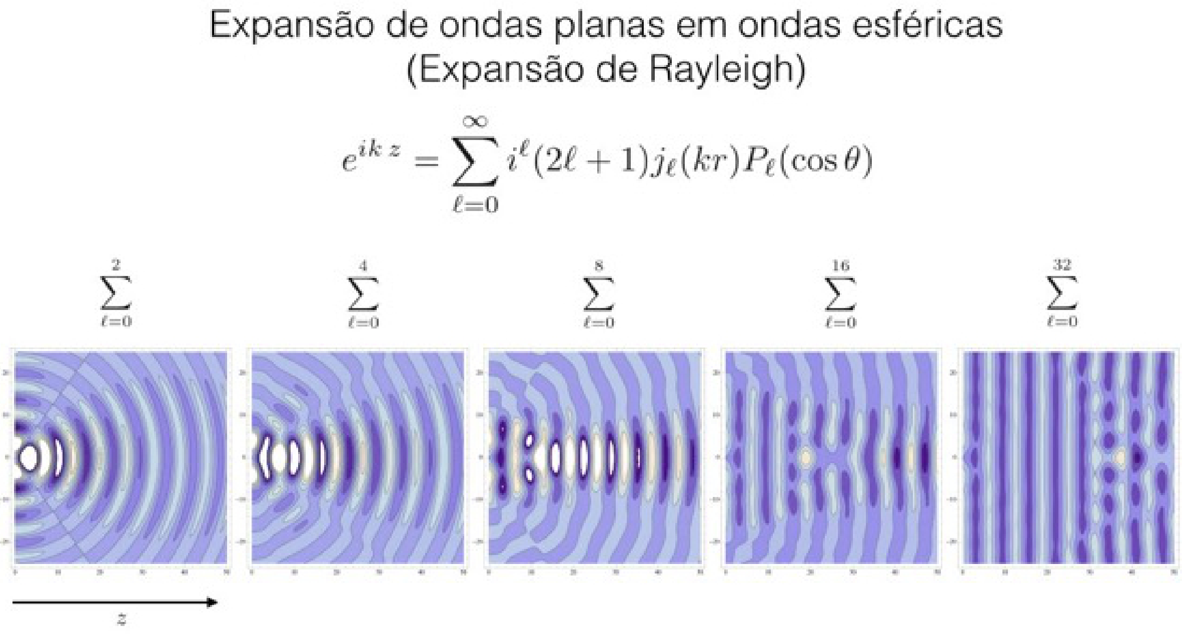
Está expressão é conhecida como expansão de Rayleigh em ondas parciais e que será usada para escrever a solução de onda emergente. Um caso particular bastante importante é quando $\hat{k} = \hat{z}$. Neste caso expansão é, utilizando o Teor. da Adição (Aula 18):

$$e^{-ikr\, cos\phi} = e^{-ikz} = 4\pi \sum_{l} (-i)^l\, j_l\,(kr) \underbrace{\sum_{m} Y^*_{lm}(\hat{k})\, Y_{lm}(\hat{n})}_{=\frac{2l+1}{4\pi} P_l\,(cos\theta)},$$

$$\boxed{e^{-ikz} = \sum_{l} (-i)^l (2l+1)\, j_l\,(kr)\, P_l\,(cos\theta)},$$

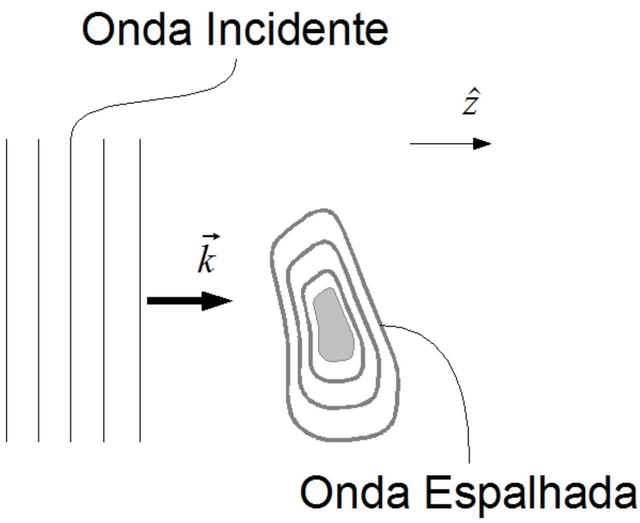
onde, evidentemente, $z = r cos\theta$.

A figura abaixo mostra como a expansão de Rayleigh se torna cada vez melhor, à medida que incluímos mais termos na soma das ondas esféricas.



Espalhamento de uma Onda Plana

Nesta seção trataremos o espalhamento da onda eletromagnética a partir de duas abordagens: vetorial e escalar. O ponto central na teoria do espalhamento, independente da abordagem escolhida, é a determinação da seção de choque diferencial (total), uma vez que apenas esta quantidade é suficiente para obter toda a informação da interação entre a onda e o obstáculo e, portanto, descrever completamente o fenômeno físico. A figura de referência a seguir, e que será utilizada à exaustão no decorrer do texto, mostra o espalhamento de uma onda plana, onde o vetor de onda é orientado tal que $\vec{k} = k\hat{z}$.



Teoria Vetorial

Como é visto em Eletromagnetismo I, os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ satisfazem determinadas condições na interface entre dois meios. Nestas superfícies, os campos podem se alterar devido à presença de cargas e correntes ou mesmo induzir cargas e correntes. Como visto na Aula 18, o espalhamento de uma onda nada mais é que a radiação emitida por dipolos elétricos (ou magnéticos) acelerados pelos campos da onda incidente.

Desta forma, para a configuração apresentada na figura de referência, os campos das ondas incidente e espalhada são:

Campos incidentes

$$\vec{E}_i = E_0 e^{ikz}\hat{z}$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{Z_0}\hat{z} \times \vec{E}_i$$

Campos espalhados

$$\vec{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left((\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} - \frac{\hat{n} \times \hat{m}}{c}\right)$$

$$\vec{H}_e = \frac{\hat{n} \times \vec{E}_e}{Z_0}$$

onde E_0 é a amplitude constante do campo elétrico incidente, $\vec{p}$ e $\vec{m}$ são os momentos de dipolo elétrico e magnético excitados pela onda no material, Z_0 a impedância do vácuo e $\hat{n}$ é o versor normal a superfície de espalhamento. Note que o campo elétrico da onda emitida é o campo de radiação de dipolo e também que a variação harmônica com o tempo foi omitida por conveniência.

Para uma polarização $\hat{\epsilon}$, a potencia média por unidade de ângulo sólido e o fluxo de intensidade são:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP_e(\hat{n},\hat{\epsilon})}{d\Omega} \right\rangle &= r^2 \frac{1}{2Z_0} |\hat{\epsilon}\cdot\vec{E}_e|^2 = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left| \hat{\epsilon}\cdot\left[\left(\hat{n}\times\vec{p}\right)\times\hat{n} - \frac{\hat{n}\times\vec{m}}{c} \right] \right|^2 \\ \langle |\vec{S}_i| \rangle &= \frac{1}{2Z_0}|\vec{E}_i|^2 \end{aligned}$$

A partir da definição da seção de choque diferencial introduzida na aula passada, encontramos:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n},\hat{\epsilon}) = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} \left| \hat{\epsilon}\cdot\vec{p} + (\hat{n}\times\hat{\epsilon})\cdot\frac{\vec{m}}{c} \right|^2}$$

Obter a seção de choque total integrando esta expressão é inconveniente, uma vez que os produtos escalares dependem implicitamente de θ e φ.

Exercício Proposto: Faça os cálculos para obter a expressão da seção de choque diferencial, inclusive os omitidos nestas notas de aula, sabendo que o vetor polarização $\hat{\epsilon}$ é perpendicular à direção $\hat{n}$.

Teoria Escalar

Vamos agora calcular as seções de choque diferencial e total em termos da função de onda escalar ψ. Considerando novamente o caso apresentado na figura de referência, a função de onda escalar da onda incidente, ψ_I, é simplesmente:

$$\psi_i = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 4\pi A \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{n}) = A \sum_l i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(cos\theta),$$

onde A é a amplitude constante da onda.

A função de onda emergente ψ_e é:

$$\psi_e \approx A\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta,\varphi),$$

onde $f(\theta,\varphi)$ é uma função que leva em consideração a distribuição angular da onda com θ o ângulo polar e φ o ângulo azimutal.

Para chegar na expressão de ψ_e é preciso tomar o limite $kr \to \infty$ na solução completa da função de onda ψ, restringindo as constantes desta solução de modo que somente uma a onda "outgoing" exista, isto é, uma onda que transporta energia do centro para fora.

Também devemos nos atentar para o fato da função ψ detectada pelo observador ser uma composição entre a onda incidente e onda espalhada. Assim, a função de onda total a ser trabalhada será:

$$\psi_{TOT} = \psi_I + \psi_e,$$

formada pela parte da onda plana incidente e pela onda espalhada.

Vamos considerar ainda que o problema possuí simetria axial, portanto, não deverá depender de φ, e a solução para ψ_{TOT} poderá ser escrita como:

$$\psi_{TOT} = A\sum_l \left(a_l j_l(kr) - b_l n_l(kr)\right) P_l(cos\theta)$$

onde a_l e b_l são reais e convenientemente escritos como:

$$\begin{aligned} a_l &= \sqrt{a_l^2+b_l^2}\frac{a_l}{\sqrt{a_l^2+b_l^2}} = r_l\, cos\delta_l \\ b_l &= \sqrt{a_l^2+b_l^2}\frac{b_l}{\sqrt{a_l^2+b_l^2}} = r_l\, sen\delta_l \end{aligned}$$

Aplicando o limite para um observador muito afastado do obstáculo, $kr \to \infty$, às funções esféricas de Bessel:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{sen(kr - l\pi/2)}{kr}; \\ n_l(kr) &\to -\frac{cos(kr - l\pi/2)}{kr}. \end{aligned}$$

Daí, substituindo em ψ_{TOT}, encontramos:

$$\psi_{TOT} \approx \frac{A}{kr}\sum_l r_l \left[cos\delta_l\, sen(kr - l\pi/2) + sen\delta_l\, cos(kr - l\pi/2)\right] P_l(cos\theta)$$

$$\boxed{\psi_{TOT} \approx \frac{A}{kr}\sum_l r_l\, sen(kr - l\pi/2 + \delta_l)\, P_l(cos\theta)}$$

Agora, para determinar $f(\theta)$, basta substituir os termos das expressões para as funções de onda que encontramos na equação que relaciona ψ_{TOT} com ψ_e e ψ_I,

$$\begin{aligned}
\psi_e &= \psi_{TOT} - \psi_I \\
A\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta) &= \frac{A}{kr}\sum_l r_l \frac{e^{i(kr-l\pi/2+\delta_l)} - e^{-i(kr-l\pi/2+\delta_l)}}{2i} P_l(cos\theta) \\
&\quad - A\sum_l i^l(2l+1)\frac{e^{i(kr-l\pi/2)} - e^{-i(kr-l\pi/2)}}{2ikr} P_l(cos\theta)
\end{aligned}$$

onde usamos a definição complexa $sen\, x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

Novamente, veja que o lado esquerdo da equação, isto é, ψ_e, não possuí termos proporcionais à e^{-ikr}. De fato, as condições de contorno no infinito exigem que ψ_e seja uma onda do tipo "outgoing". Portanto, devemos impor o cancelamento dos termos multiplicados por este fator do lado direito da equação para encontrar, logo:

$$r_l e^{-i\delta_l} - i^l(2l+1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_l = i^l(2l+1)e^{i\delta_l}}$$

Substituindo r_l na expressão de $f(\theta)$, encontramos, após algum algebrismo:

$$\boxed{f(\theta) = \frac{2}{k}\sum_l e^{i\delta_l}\, sen\delta_l\, \frac{2l+1}{2} P_l(cos\theta)}$$

A seção de choque diferencial, calculada a partir da definição, é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left\langle \frac{dP}{d\Omega}\right\rangle}{\langle S\rangle} = \frac{|\psi_e|^2}{|\psi_I|^2} = \cancel{r^2}\frac{\cancel{A^2}|f(\theta)|^2}{\cancel{r^2}}\frac{1}{\cancel{A^2}} = |f(\theta)|^2,$$

e a total:

$$\sigma = \int d\Omega\, |f(\theta)|^2 = 2\pi \int_{-1}^{1} d(cos\theta)\, |f(\theta)|^2.$$

O resultado desta integral (até mesmo para um $f(\theta)$ qualquer) é facilmente obtido se usarmos a Transformada de Legendre definida por:

$$F(j) = \int_{-1}^{1} f(x) P_j(x) dx$$

e a transformada inversa escrita como:

$$f(x) = \sum_j F(j) \frac{2j+1}{2} P_j(x).$$

Calculando a integral de $|f(x)|^2$ entre $x \in [-1,1]$, temos;

$$\int_{-1}^{1} dx |f(x)|^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(\sum_j F(j) \frac{2j+1}{2} P_j(x) \sum_{j'} F^*(j') \frac{2j'+1}{2} P'_j(x) \right) = \sum_j \frac{2j+1}{2} |F(j)|^2,$$

onde foi usado, na segunda igualdade, a ortonormalidade entre P_j e P'_j (ver Aula 18).

Identificando $F(j) = f_l = (2 e^{i\delta_l} sen\delta_l)/k$ e $f(x) = f(\theta)$, entramos a seguinte expressão para a seção de choque:

$$\boxed{\sigma = 2\pi \sum_l \frac{2l+1}{2} |f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) sen^2\delta_l}$$

Este resultado concorda com o Teorema Ótico, que diz que a seção de choque é dada por:

$$\sigma_{EM} = \frac{4\pi}{k} Im[f(\theta = 0)]$$

a menos de um fator k^{-1}, e pode ser facilmente verificado a partir da expressão geral de $f(\theta)$ que calculamos nestas notas.

Exercício Proposto:Repita todos os cálculos feitos para encontrar a seção de choque.

Dicas importantes:

- Para encontrar a expressão aproximada de ψ_{TOT}, após a aplicação do limite $kr \rightarrow \infty$, é necessário usar a expressão para o seno da soma.

- No cálculo de $f(\theta)$, lembre-se que todas as função de onda em $\psi_e = \psi_{TOT} - \psi_I$ precisam ser aproximadas para o limite de um observador muito distante, em outras palavras, as funções de Bessel esféricas devem ser aproximadas no limite $kr \rightarrow \infty$.

- Ainda no cálculo de $f(\theta)$, use a seguinte igualdade para obter a exata expressão destacada no texto: $i^l = e^{il\pi/2}$