Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 16

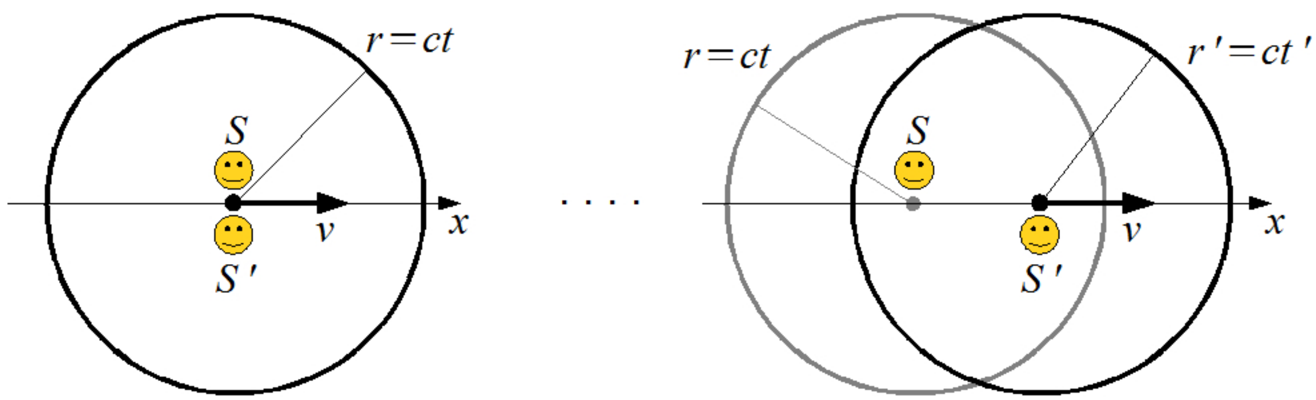
Equação de Onda

A equação de onda para uma onda eletromagnética no vácuo é

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi = 0$$

onde c é a velocidade da luz, constante para todos os observadores e independente do estado de movimento do objeto, e ψ pode ser qualquer potencial ou campo, isto é, φ, $\vec{A}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Considere um pulso luminoso ("flash") emitido em todas as direções no momento em que dois observadores coincidem as origens de seus respectivos sistemas de coordenadas S e S' como indicado na figura.



O observador em movimento está posicionado no referencial S' e move-se com velocidade constante v na direção x. Tanto para S, quanto para S', o pulso de luz deve-se propagar na forma de uma esfera, com raio $r = ct$ para S, e raio $r' = ct'$ para S'.

A invariância de $\underline{c}$ implica na <u>relatividade de distâncias e tempo</u>, isto é, a distância e o tempo devem se transformar na mudança de referencial de tal modo que a velocidade da luz permaneça constante.

Para os referenciais S e S' as transformações corretas são:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ou melhor:

$$X' = \Lambda X$$

onde $X' = \{ct', x', y', z'\}$, tal que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\Lambda \\ \text{Trans. de Lorentz}}} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

Note que essa transformação deixa a combinação invariante:

[Mostre!]

$$\begin{aligned} -c^2 t'^2 + |x'|^2 &= -c^2 t^2 + |x|^2 \\ -c^2 dt'^2 + d\vec{x}'^2 &= -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{luz: } c^2 dt^2 = d\vec{x}^2 &= (dr)^2 \\ dr &= c\,dt \\ dr' &= c\,dt' \end{aligned}$$

A invariância também se estende à equação de onda:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \qquad \text{[Mostre!]}$$

É factível pensar em X como um "vetor 4-D", isto é,

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} \text{coordenadas de "eventos"} \\ \text{no "espaço tempo"} \end{pmatrix}$$

Nesta notação a transformação de Lorentz identifica-se como

$$\Lambda^{\alpha\mu} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \alpha=0 \\ \alpha=1 \\ \alpha=2 \\ \alpha=3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \mu=0 & \mu=1 & \mu=2 & \mu=3 \end{array} & \end{array}$$

$$\therefore\ X'^\alpha = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda^{\alpha\mu} X^\mu$$

Nota: $\Lambda^{\alpha\mu}$ NÃO É um "tensor".

Elemento de distância 4-D ("invariante")

O elemento de distância 4-D é definido como:

$$\begin{aligned} |dX|^2 &\equiv -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} cdt & x & y & z \end{pmatrix}}_{dX^\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\eta\ \text{"Métrica de Minkowski"}} \underbrace{\begin{pmatrix} cdt \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{dX^\mu} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3} dX^\alpha \cdot \eta^{\alpha\mu} \cdot dX^\mu \end{aligned}$$

Campo Elétrico e Campo Magnético

As seis componentes dos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são relacionadas aos potenciais φ e $\vec{A}$, cujas componentes somadas resultam em um total de quatro (três vetoriais e uma escalar).

As fontes desses campos ρ e $\vec{j} \leftrightarrow \rho\vec{u}$, respectivamente, a densidade de carda e densidade de corrente (onde $\vec{u}$ é a velocidade das cargas), estão relacionadas pela equação da continuidade:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{“tempo”}} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}}_{\text{“espaço”}} = 0$$

Transformando a variação no tempo da equação acima em uma “variação espacial ct”, é possível escrever a equação da continuidade em termos de um quadrivetor:

$$J^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} J^{\mu} = \frac{1}{\cancel{c}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cancel{c}\right) + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Também é possível escrever um quadrivetor potencial A^{μ} que coleciona as quatro componentes dos potenciais escalar e vetor:

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}.$$

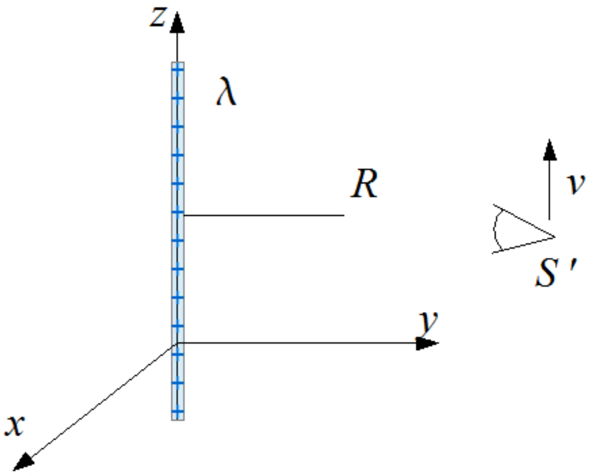
O Calibre de Lorentz nesta notação, por exemplo, é

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} A^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Mas se φ e $\vec{A}$ fazem parte de um “potencial 4-D”, então o que dizer de $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Que são apenas vetores 3-D, como podemos ver a partir de suas definições

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad\qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Mais um “problema”: Suponha um fio infinito com densidade linear de cargar λ, como mostrado na figura.



Os campos elétrico e magnético a uma distância R do fio são

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R}; \qquad \vec{B} = 0$$

Suponha agora um observador S' se movendo com velocidade v na direção z. Nesta situação, temos

$$\lambda \to \lambda' \qquad \vec{j} \sim -\lambda'\vec{v} = -\lambda' v\,\hat{v}$$

Como sabemos ρ e $\vec{j}$ em J^μ se transformam como um um 4-D vetor, portanto,

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \lambda c\delta(x)\delta(y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \rho = \lambda\delta(x)\delta(y)$$

$$J'^\alpha = \sum_{\mu=0}^{3}\Lambda^{\alpha\mu}J^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda c\delta(x)\delta(y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\lambda c\delta(x)\delta(y) \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\lambda\frac{v}{c}c\delta(x)\delta(y) \end{pmatrix}$$

$$\rho' = \lambda' c\delta(x)\delta(y)$$

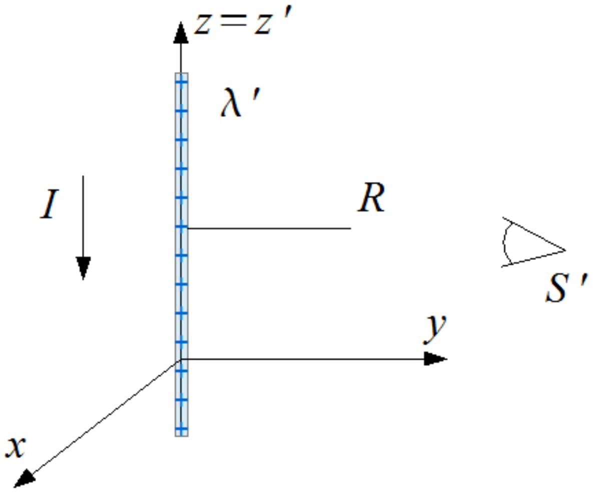
$$\vec{j}' = -\lambda' v\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$$

$$\boxed{\lambda' = \gamma\lambda}$$

No referencial S' há uma corrente $I' = -\lambda' v$ como indicado na figura. Os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ são calculados como

$$\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R} = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R}$$

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi}\frac{\hat{\varphi}}{R} = -\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi}\frac{\hat{\varphi}}{R}$$



Resta saber como é a transformação de coordenadas que leva os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ aos campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$.