Solução de Problemas sobre Radiação

A. Comentários sobre problemas da terceira lista

10.3 Aplicação direta das relações $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
10.4 e das equações de Maxwell.

10.5 Aplicação direta das transformações de calibre, $\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$; $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$, e complementa o Prob. 3.

10.8

Mais complexo e portanto vamos encaminhá-lo.

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,d\tau' \; ; \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,d\tau'$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' \; ; \quad t_r = t - \frac{R}{c}$$

Queremos mostrar que $\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

Notamos que a divergência implica em derivadas com relação às componentes de $\vec{r}$ e não de $\vec{r}\,'$

$$\therefore \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}}{R}\right)\right]d\tau'$$

No caso de $\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)$, as derivadas se aplicam somente a t_r, que depende de $\vec{r}$, para t fixo.

$$\therefore \nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{J} + \vec{J}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$$

Como $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$, temos que $\nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R}$, onde ∇' ~~implica em~~ significa derivadas com relação às componentes de $\vec{r}'$.

$$\therefore\ \nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{j} - \vec{j}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{j} + \frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j} - \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{R}\right)$$

Notamos que $\vec{j}$, no integrando, depende de $\vec{r}$ só implicitamente, através de t_r

$$\vec{j}(\vec{r}', t_r(R)) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}$$

$$\left.\frac{\partial t_r}{\partial x}\right|_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial x}$$ e o mesmo para as outras componentes. Então

$$\nabla\cdot\vec{j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t_r}\cdot\nabla R$$

Por outro lado, quando as derivadas são com relação à $\vec{r}'$, temos que levar em conta que, no integrando, $\vec{j}$ depende também de $\vec{r}'$ explicitamente, ou seja,

$$\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}', t_r(R)) = \left.\frac{\partial j_x}{\partial x'}\right|_{t_r} + \left.\frac{\partial j_y}{\partial y'}\right|_{t_r} + \left.\frac{\partial j_z}{\partial z'}\right|_{t_r} + \frac{\partial j_x}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z'}$$

Mas, pela equação da continuidade,

$$\left.\nabla\cdot\vec{j}\right|_t + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \therefore \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\therefore\ \nabla'\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t_r}\cdot\nabla' R$$

Com esse encaminhamento, e levando em conta que $\nabla R = -\nabla' R$, os alunos poderão completar o problema.

<u>10.9</u> Fizemos o item a) em aula. No item b) basta ~~mu~~ usar a função δ no instante retardado, ou seja,

$$I(t_r) = q_0 \delta(t_r) = q_0 \delta\left(t - \frac{R}{c}\right) = q_0 \delta\left[\frac{1}{c}(ct - R)\right]$$

e a seguinte propriedade das função δ:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

<u>10.10</u> Aqui é necessário utilizar a expressão do potencial vetor para um fio, que derivamos em aula

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{R}\, d\tau' \Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(t_r)}{R}\hat{e}_\ell\, d\ell'$$

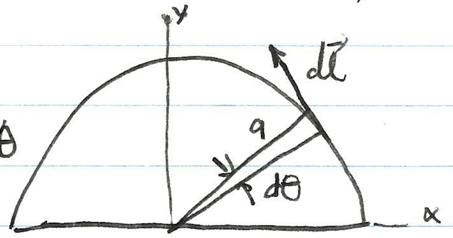
onde $\hat{e}_\ell$ é o versor (neste caso variável) ao longo do fio. Na solução apresentada pelo autor, ele escreve

$\vec{I}$

como vetor, o que está conceitualmente errado!

Escrevendo $\hat{e}_\ell\, d\ell' = d\vec{\ell}'$, notar que, para fazer a integral é necessário decompor $d\vec{\ell}'$, ao longo do arco de círculo, em coordenadas cartesianas

$$d\vec{\ell} = a\, d\theta\, \hat{e}_\ell = -a(\cos\theta\, \hat{e}_x + \sin\theta\, \hat{e}_y)\, d\theta$$



A partir desta observação é fácil fazer o problema.

29/04/2015

4.

(Notar que os problemas 10.13 e 10.14 do livro texto foram vistos em aula; os problemas 10.11 e 10.12 são referentes a tópico não discutido).

<u>10.18</u>

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}(\vec{R}-R\vec{\beta})(1-\beta^2)\right] + \qquad (\vec{E}_v)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2 s^3}(\vec{R}\cdot\vec{a})(\vec{R}-R\vec{\beta}) - \frac{R\vec{a}}{c^2 s^2}\right] \qquad (\vec{E}_a)$$

[ao estudar pelo livro texto, notar que r corresponde ao nosso R e $\vec{u} = c\hat{R} - \vec{v}$]

$$\vec{\beta} = \beta\hat{e}_x \;;\; \vec{a} = a\hat{e}_x$$

$$\vec{R} = R\hat{e}_x$$

$$\therefore \quad \vec{R} - R\vec{\beta} = R(1-\beta)\hat{e}_x \;;\; \vec{R}\cdot\vec{a} = Ra\hat{e}_x \;;\; s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta} = R(1-\beta)$$

$$\therefore \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R}{R^3(1-\beta)^{\cancel{3}2}}\cancel{(1-\beta)}(1-\beta^2) + \cancel{\frac{1}{c^2 R^3(1-\beta)^3}R^2 a(1-\beta)} - \cancel{\frac{Ra}{c^2 R^2(1-\beta)^2}}\right]\hat{e}_x$$

$$\therefore \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}\,\hat{e}_x$$

$$\frac{1}{2}mv^2 =$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}vt$$

$$x = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}gv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

11.5 Este é um problema de aplicação direta de fórmula, calcular os campos a partir da expressão para $\vec{A}$ produzida por um dipolo magnético. Esta matéria, seções 11.1.1 a 11.1.3 não foi vista em aula e não será cobrada na segunda prova. O problema foi dado apenas para os alunos se motivarem a ler este tópico, complementando a teoria de radiação.

11.10

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{[\hat{n}\times((\hat{n}-\vec{\beta})\times\vec{a})]^2}{[1-\hat{n}\cdot\vec{\beta}]^5}$$

Neste caso, $\vec{v} = -gt\,\hat{e}_y$; $\vec{a} = -g\hat{y}$, ou seja, $\vec{\beta} \parallel \vec{a}$, caso visto em aula, em que

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{a})]^2}{[1-\hat{n}\cdot\vec{\beta}]^5} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{a^2\sin^2\theta}{[1-\beta\cos\theta]^5}$$

No primeiro centímetro, $y = \frac{1}{2}vt \therefore v = \sqrt{\frac{2y}{g}} \approx \sqrt{\frac{2\times10^{-2}}{10\times}} \ll c$

$\therefore$ $\beta \ll 1$

$$\therefore \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right. a^2\sin^2\theta \Rightarrow P(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon}\right)\frac{g^2}{c^3}$$

$t \approx \sqrt{\frac{2y}{g}}$ ... segue.