

Mecânica Quântica I - 4300403

3^a lista

- 1) Mostre que o valor esperado da energia potencial no n -ésimo estado do oscilador harmônico é

$$\langle V \rangle = \frac{E_n}{2}.$$

Compare com o caso clássico.

- 2) a) Construa $\psi_2(x)$.
b) Faça um esboço de ψ_0 , ψ_1 e ψ_2 .
c) Verifique diretamente, por meio de integração explícita, a ortogonalidade desses estados. Dica: não se esqueça de considerar a paridade dos estados.
- 3) a) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ para os estados

$$\psi_0(x) = \alpha e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$$

onde $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ e $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$, por meio de integração explícita.

- b) Mostre que para esses estados vale o princípio da incerteza: $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$.
c) Calcule $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ para esses estados (nenhuma nova integração é necessária). A soma deles é o esperado?
- 4) Mostre que $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ no n -ésimo estado do oscilador harmônico são dados por:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \langle p^2 \rangle = m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Confira que o princípio da incerteza é obedecido.

- 5) Uma partícula no potencial do oscilador harmônico está no estado

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)].$$

- a) Calcule A .
b) Calcule $\Psi(x, t)$ e $|\Psi(x, t)|^2$.
c) Mostre que no estado $\Psi(x, t)$

$$\langle x \rangle = \frac{24}{25} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos(\omega t), \quad \langle p \rangle = -\frac{24}{25} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \sin(\omega t)$$

- d) Mostre que o Teorema de Ehrenfest, $d\langle p \rangle/dt = -\langle \partial V/\partial x \rangle$, é válido para essa função de onda.
- e) Ao medir a energia da partícula que valores voce poderá obter, e com quais probabilidades?
- 6) Uma partícula está no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω quando, repentinamente, a frequência do oscilador duplica sem, inicialmente, mudar a função de onda. Quais são as probabilidades de, numa medida de energia, se encontrar os valores: $\hbar\omega/2$ e $\hbar\omega$?

7) Mostre que, para uma partícula no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω , a probabilidade de encontrar a partícula fora da região classicamente permitida é:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty d\xi e^{-\xi^2} = 0.157$$

8) Calcule as energias permitidas do meio oscilador harmônico:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & \text{para } x > 0 \end{cases},$$

9) Mostre que:

a) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

b) $H_{2n+1}(0) = 0$, $H_{2n}(0) = (2n)!(-1)^n/n!$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

10) Calcule ψ_0 , ψ_1 e ψ_2 diretamente da expressão:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$