Questão 1 (2,5)

Um diapasão vibra a 600 Hz. Em uma de suas hastes está presa uma corda esticada de comprimento L, densidade linear de massa igual a $2{,}5$ g/m, que está submetida a uma tensão de 400 N. As duas extremidades da corda podem ser consideradas como fixas. A onda estacionária na corda apresenta quatro ventres e uma amplitude de $2{,}0$ mm.

(0,5): a) Qual é a velocidade de uma onda nesta corda?

(1,0): b) Qual é o comprimento L da corda?

(0,5): c) Escreva uma equação para o deslocamento da corda como função da posição e do tempo.

(0,5): d) Qual é a tensão necessária para que a corda vibre no terceiro harmônico?

---

a)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{400\ \text{N}}{2{,}5\times10^{-3}\ \text{kg/m}}} = 400\ \text{m/s}$$

b)

$$\text{quatro ventres:} \quad L = 2\lambda_4$$

$$\lambda_4 = \frac{v}{\nu} = \frac{400\ \text{m/s}}{600\ \text{s}^{-1}} = \tfrac{2}{3}\ \text{m}$$

$$L = \tfrac{4}{3}\ \text{m}.$$

c) Supondo $x = 0$ em uma das extremidades da corda

$$\boxed{y(x{,}t) = A\,\text{sen}\,kx\cos(\omega t + \phi)}$$

$$\phi\ \text{qualquer}$$

$$A = 2{,}0\ \text{mm} = 2{,}0\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3\pi\ \text{rad/m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 1200\pi\ \text{rad/s}$$

d)

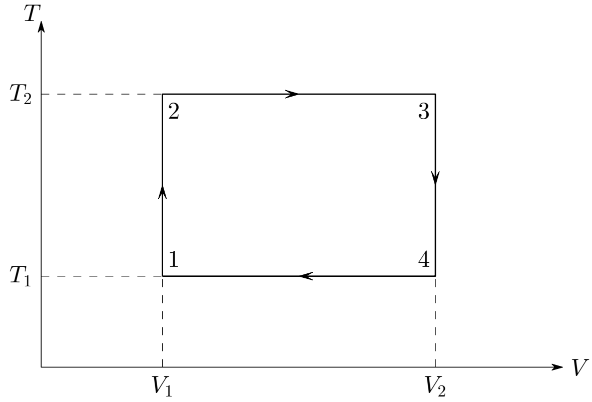
$$\text{três ventres:} \quad L = \tfrac{3}{2}\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \tfrac{2}{3}L = \tfrac{4}{3}\lambda_4 = \tfrac{8}{9}\ \text{m}$$

$$v' = \lambda_3\nu = \tfrac{4}{3}v = \tfrac{1}{3}1600\ \text{m/s}$$

$$T' = \mu\,(v')^2 = \tfrac{16}{9}\mu v^2 = \tfrac{16}{9}T = 711\ \text{N}$$

Questão 2 (2,5)

A figura ao lado mostra o ciclo de um motor de Stirling no diagrama TV. A substância de trabalho é uma quantidade molar n de um gás ideal com $c_V = \frac{3}{2}R$. O motor trabalha entre dois reservatórios térmicos: o frio à temperatura T_1 e o quente à temperatura T_2. Considere dados, também, os volumes V_1 e V_2 do gás nas duas isocóricas.



(1,0): a) Calcule o calor $|Q_\mathrm{q}|$ absorvido pelo gás do reservatório quente (processos $1 \to 2 \to 3$) e o calor $|Q_\mathrm{f}|$ transferido pelo gás ao reservatório frio (processos $3 \to 4 \to 1$) por ciclo.

(0,5): b) Compute o trabalho total realizado pelo gás por ciclo.

(0,5): c) Suponha $T_2 = 2T_1$ e $V_2 = \mathrm{e}V_1$ (e é o número de Euler, $\ln \mathrm{e} = 1$). Determine o rendimento deste motor.

(0,5): d) Compare o resultado do item anterior com o rendimento de um motor de Carnot funcionando entre os mesmos dois reservatórios térmicos. O motor de Stirling, como descrito, é ou não reversível? Justifique.

(1,0): a) Processo $1 \to 2$, isocórico

$$Q_{1\to2} = nc_V(T_2 - T_1) = \tfrac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$$

Processo $2 \to 3$, isotérmico

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = Q - W = 0$$

$$Q_{2\to3} = W_{2\to3} = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} nRT_2\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$Q_{2\to3} = nRT_2 \ln(V_2/V_1)$$

Assim

$$\left|Q_\mathrm{q}\right| = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} = nR\left[\tfrac{3}{2}(T_2 - T_1) + T_2\ln(V_2/V_1)\right]$$

Processo $3 \to 4$, isocórico

$$Q_{3\to4} = nc_V(T_1 - T_2) = \tfrac{3}{2}nR(T_1 - T_2) = -Q_{1\to2}$$

Processo $4 \to 1$, isotérmico

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = Q - W = 0$$

$$Q_{4\to1} = W_{4\to1} = \int_{V_2}^{V_1} P\mathrm{d}V = \int_{V_2}^{V_1} nRT_1\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$Q_{4\to1} = -nRT_1 \ln(V_2/V_1)$$

Assim

$$|Q_\mathrm{f}| = -Q_{3\to4} - Q_{4\to1} = nR\left[\tfrac{3}{2}(T_2 - T_1) + T_1\ln(V_2/V_1)\right]$$

(0,5): b) O trabalho nas isocóricas é nulo $(\mathrm{d}V = 0)$:

$$\begin{aligned} W_{\text{ciclo}} &= W_{2\to3} + W_{4\to1} \\ &= Q_{2\to3} + Q_{4\to1} \\ W_{\text{ciclo}} &= nR\,(T_2 - T_1)\ln(V_2/V_1) \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{ciclo}} &= Q_{\text{ciclo}} - W_{\text{ciclo}} = 0 \\ W_{\text{ciclo}} &= Q_{1\to2} + Q_{2\to3} + Q_{3\to4} + Q_{4\to1} \\ W_{\text{ciclo}} &= nR\,(T_2 - T_1)\ln(V_2/V_1) \end{aligned}$$

(0,5): c) Para um motor térmico:

$$\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{q}}} = \frac{nR\,(T_2 - T_1)\ln(V_2/V_1)}{nR\left[\frac{3}{2}(T_2 - T_1) + T_2\ln(V_2/V_1)\right]}$$

Com $T_2 = 2T_1$ e $V_2 = \mathrm{e}V_1$:

$$\eta = \frac{(2T_1 - T_1)\ln \mathrm{e}}{\frac{3}{2}(2T_1 - T_1) + 2T_1 \ln \mathrm{e}} = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{2}{7}$$

(0,5): d) Para um motor de Carnot com $T_2 = 2T_1$

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\eta < \eta_{\text{Carnot}}$$

e o motor de Stirling é **irreversível**.
Os processos intrinsecamente irreversíveis no ciclo de Stirling são as isocóricas ao longo das quais o gás tem uma temperatura diferente da temperatura do reservatório com o qual troca calor.

Questão 3 (2,5)

Um trem, de comprimento próprio L, move-se em uma trajetória retilínea com velocidade $v = \frac{3}{5}c$ em relação ao referencial S fixo na Terra. Um homem corre ao longo do trem, no mesmo sentido de movimento, com velocidade $u' = \frac{4}{5}c$ medida no referencial S' fixo no trem.

(0,5): a) Qual é o intervalo de tempo, medido no referencial S', desde o instante em que o corredor parte de uma extremidade e chega à extremidade oposta do trem?

(0,5): b) O homem carrega consigo um cronômetro. Qual é o tempo medido nesse cronômetro desde o instante da partida até a chegada na outra extremidade do trem?

(1,0): c) Qual é a velocidade u deste corredor, medida no referencial S da Terra?

(0,5): d) Qual é o tempo medido em S entre os instantes em que o corredor parte de uma extremidade do trem e chega na outra?

---

a)

$$\boxed{\Delta t' = \frac{L}{u'} = \frac{5L}{4c}}$$

b)

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t'}{\gamma(u')}, \quad \gamma(u') = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}}} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{\Delta t_0 = \frac{3L}{4c}}$$

c)

$$v_x = \frac{v_x + V}{1 + \frac{V v_x}{c^2}}, \quad v_x' = u' = \tfrac{4}{5}c, \quad V = \tfrac{3}{5}c$$

$$\boxed{u = v_x = \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}\frac{4}{5}} c = \tfrac{35}{37}c.}$$

d) Em S o comprimento do trem é $L/\gamma(V)$

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}}} = \frac{5}{4}$$

$$u\Delta t = \frac{L}{\gamma(V)} + V\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{\gamma(V)\,(u - V)}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{4L}{5c}\frac{1}{\frac{35}{37} - \frac{3}{5}} = \frac{37L}{16c}}$$