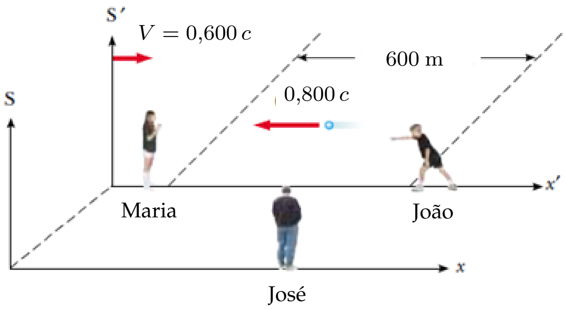
Questão 1 (2,5)

João e Maria estão jogando um jogo de atirar bolas no sistema S' que está movendo a $0{,}600\,c$ em relação ao referencial S, enquanto José, que está em repouso em S, assiste o jogo. João e Maria estão em repouso no referencial S' a 600 m um do outro. Este jogo relativístico acontece num universo onde $c = 50$ m/s. João atira a bola para Maria a $0{,}800\,c$ (em relação a João).



(0,5): a) De acordo com Maria, qual é a velocidade da bola?

(0,5): b) De acordo com Maria, quanto tempo levará a bola para alcançá-la?

(1,0): c) De acordo com José, qual é a distância entre João e Maria e qual é a velocidade da bola?

(0,5): d) De acordo com José, quanto tempo levará a bola para alcançar Maria?

---

a)

$$v' = 0{,}800\,c = 40 \text{ m/s}: \vec{v}' = -(40 \text{ m/s})\,\hat{x}'$$

b)

$$\Delta t' = \frac{d_0}{v'} = \frac{600 \text{ m}}{40 \text{ m/s}} = 15{,}0 \text{ s}$$

c)

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}6^2)}} = \tfrac{5}{4} = 1{,}25$$

$$d = \frac{d_0}{\gamma} = 480 \text{ m}$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + V v'_x/c^2} = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5}\frac{3}{5}}c = -\tfrac{5}{13}c = -19{,}23 \text{ m/s}$$

d) Para José, a bola e Maria estão inicialmente separados de $d = 480$ m (item c). Maria tem velocidade $V = +0{,}6c = \frac{3}{5}c = 30$ m/s e a bola tem velocidade $v_x = -\frac{5}{13}c = -19{,}23$ m/s:

$$V\Delta t = d + v_x \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{V - v_x} = \frac{d}{c}\frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{5}{13}} = \frac{65d}{64c} = 9{,}75 \text{ s}$$

Questão 2	(2,5)

Três eventos são observados no referencial estacionário S. As coordenadas espaciais destes eventos, em km, são: $(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$, $(x_2,y_2,z_2) = (0,200,0)$ e $(x_3,y_3,z_3) = (3,0,0)$, sendo que os primeiros dois eventos ocorrem simultaneamente e $1{,}0\times10^{-6}$ s depois destes ocorre o terceiro evento. Considerando que um referencial S' se desloca com $\vec{V} = 0{,}8c\,\hat{\imath}$ em relação a S, de tal forma que as origens de ambos os sistemas estavam sobrepostas no instante $t = t' = 0$, responda:

(1,0): a) Um observador localizado na origem do sistema S' verá algum destes eventos de forma simultânea?

(1,0): b) Existe algum sistema S'' se movendo na direção positiva do eixo x em relação a S onde estes 3 eventos seriam vistos simultaneamente? Se sua resposta for positiva, qual seria a velocidade deste sistema em relação ao sistema S; se for negativa, explique por que isto não é possível.

(0,5): c) Existe algum outro sistema S''', também se movendo na direção positiva do eixo x em relação à S, onde os eventos 1 e 3 seriam vistos sobrepostos? Se sua resposta for positiva, qual seria a velocidade deste sistema em relação ao S; se for negativa, explique por que isto não é possível.

---

a) $\gamma = 5/3$

Para ocorrer simultaneamente $\Delta t'_{ij} = t'_j - t'_i = 0$, com

$$\Delta t'_{ij} = \gamma\left(\Delta t_{ij} - \frac{V}{c^2}\Delta x_{ij}\right)$$

$$\Delta t_{12} = 0,\ \Delta x_{12} = 0 \Rightarrow \Delta t'_{12} = 0$$

Os eventos 1 e 2 são simultâneos em qualquer referencial.

$$\Delta t_{13} = 1{,}0\times10^{-6}\ \mathrm{s},\ \Delta x_{13} = 3\ \mathrm{km}$$
$$\Rightarrow \Delta t'_{13} = \tfrac{5}{3}\left(1{,}0\times10^{-6}\ \mathrm{s} - \frac{0{,}8\times 3\ \mathrm{km}}{3{,}00\times10^{5}\ \mathrm{km/s}}\right) = -11{,}7\times10^{-6}\ \mathrm{s}$$

Os eventos 1 e 3 não são simultâneos em S'. Neste referencial, o evento 3 ocorre antes dos eventos 1 e 2.

b) Como apontado anteriormente, os eventos 1 e 2 são simultâneos em qualquer referencial, uma vez que $\Delta t_{12} = 0$ e $\Delta x_{12} = 0$.

Para que $\Delta t''_{13} = 0$, V tem que ser tal que:

$$\Delta t''_{13} = \gamma''\left(\Delta t_{13} - \frac{V}{c^2}\Delta x_{13}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \Delta t_{13} = \frac{V}{c^2}\Delta x_{13} \Rightarrow \frac{V}{c} = \frac{c\Delta t_{13}}{\Delta x_{13}} = 0{,}10.$$

Como $V/c < 1$, isto é possível: $V_{S''} = 0{,}10\,c\,\hat{\imath}$.

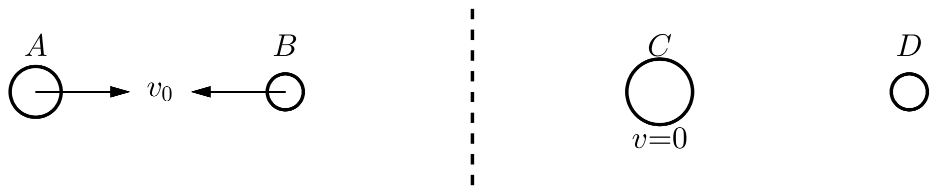
c) Para que $\Delta x'''_{13} = 0$

$$\Delta x'''_{13} = \gamma'''\left(\Delta x_{13} - V\Delta t_{13}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \Delta x_{13} = V\Delta t_{13} \Rightarrow V = \frac{\Delta x_{13}}{\Delta t_{13}} = \frac{3\ \mathrm{km}}{1{,}0\times10^{-6}\ \mathrm{km/s}} = 3{,}0\times10^{6}\ \mathrm{km/s} = 10\,c$$

e, portanto, não existe tal referencial.

Questão 3 (2,5)

Considere uma colisão entre duas partículas, A e B, em que esta colisão resulta em duas partículas novas C e D como mostrado abaixo. A massa de repouso da partícula A é $6m_0$ enquanto a massa de repouso da partícula B é $3m_0$. No referencial do laboratório, de onde a colisão é observada, as partículas A e B viajam em direções opostas, mas com o mesmo módulo de velocidade $v_0 = \frac{4}{5}c$. Depois da colisão a partícula C está em repouso para um observador no laboratório.



Se a massa de repouso da partícula C é $10m_0$, encontre no sistema de referência do laboratório:

(0,5): a) O momento da partícula D.
(0,5): b) A energia total da partícula D.
(0,5): c) A massa de repouso da partícula D.
(1,0): d) Se a massa de repouso da partícula C for $11m_0$, encontre a velocidade da partícula D.

---

a) Conservação do momento linear

$$P_{\mathrm{i}} = m_A v_A + m_B v_B = P_{\mathrm{f}} = p_D$$
$$\gamma = \gamma_A = \gamma_B = \tfrac{5}{3}$$
$$p_D = \tfrac{5}{3}\left(6m_0 - 3m_0\right)\tfrac{4}{5}c = 4m_0 c.$$

b) Conservação da energia

$$E_{\mathrm{i}} = E_A + E_B = E_{\mathrm{f}} = E_C + E_D$$
$$E_D = E_A + E_B - E_C$$
$$E_D = \gamma_A m_A c^2 + \gamma_B m_B c^2 - m_C c^2$$
$$\frac{E_D}{m_0 c^2} = \tfrac{5}{3}\left(6+3\right) - 10 = 5$$
$$E_D = 5m_0 c^2.$$

c) Usando os resultados anteriores:

$$E_D^2 = \left(m_D c^2\right)^2 + \left(p_D c\right)^2$$
$$m_D^2 = \left(5m_0\right)^2 - \left(4m_0\right)^2 = \left(9m_0\right)^2$$
$$m_D = 3m_0.$$

d) Repetindo o item b) com $m_C = 11m_0$ e com $p_D = 4m_0 c$ do ítem a):

$$E_D = 4m_0 c^2 = p_D c.$$

A partícula D tem, portanto, massa nula e sua velocidade é c.

Questão 4 (2,5)

Uma partícula denominada D^+ é criada com energia relativística $E = 1{,}0\times10^6$ MeV (medida por observador na Terra) a 5 km do nível do mar. Sua vida média própria é de $T_0 = 1{,}0\times10^{-12}$ s e sua massa de repouso é $2000\ \mathrm{MeV}/c^2$.

(1,0): a) Qual será o tempo de vida médio do D^+ para um observador na Terra?

(0,5): b) Aproximando, agora, a velocidade do D^+ como sendo igual à velocidade da luz, em média, a que distância do ponto em que foi criada a partícula se desintegrará? Ela atingirá o nível do mar?

(1,0): c) Segundo o referencial da partícula, a que distância a Terra se encontra no instante em que a partícula foi criada?

---

a)

$$E = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1{,}0\times10^6}{2000} = 500.$$

Para observadores na Terra,

$$T = \gamma T_0 = 500 T_0 = 5{,}00\times10^{-10}\ \mathrm{s}.$$

b) Distância percorrida segundo observadores na Terra

$$\Delta x = vT \approx cT = 15\ \mathrm{cm}.$$

Portanto, não atinge o nível do mar.

c) No referencial da partícula (contração de Lorentz):

$$d' = \frac{d}{\gamma} = \frac{5\ \mathrm{km}}{500} = 10\ \mathrm{m}.$$