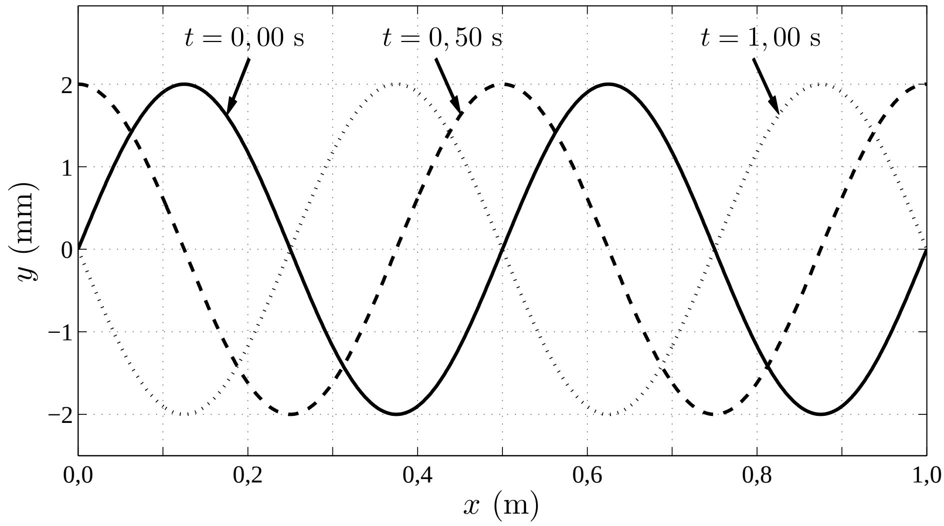
Questão 1 (2,5)

Na figura abaixo, a função $y(x,t)$ que descreve uma onda harmônica propagando-se em uma corda no sentido **negativo** de x é mostrada em 3 instantes de tempos diferentes (t=0, t=0,50 s e t=1,00 s).



Responda as questões abaixo com base nas informações do gráfico, justificando TODAS as respostas (respostas do tipo "segundo o gráfico" não serão aceitas).

(0,5): a) Calcule o comprimento de onda, o período e a velocidade da onda.
(0,5): b) Se a tensão na corda é 0,25 N, calcule a densidade linear de massa da corda.
(0,5): c) Escreva a expressão para o perfil da onda $y(x,t)$.
(0,5): d) Calcule a velocidade e a aceleração transversais máximas de um elemento da corda.
(0,5): e) Calcule a intensidade (ou seja, a potência média) da onda na corda.

Onda progressiva numa corda

a) O gráfico apresenta 2 λ em 1 metro (sendo cada λ a distância, por exemplo, entre 2 cristas da onda ou entre dois zeros):

$$\lambda = 0{,}50 \text{ m}.$$

As diferentes curvas do gráfico mostram que a onda caminha $\lambda/2$ em $\Delta t = 1$ s (compare, por exemplo, o ponto $y = 0$ na curva correspondente a $t = 0$ s e este mesmo ponto na curva para $t = 1$ s.) Logo:

$$v = (\lambda/2)/\Delta t = 0{,}25 \text{ m/s}.$$

Para o período:

$$\tau = \lambda/v \Rightarrow \tau = 2{,}0 \text{ s}.$$

b) Para uma corda, $v = \sqrt{T/\mu}$:

$$\mu = T/v^2 = 4{,}0 \text{ kg/m}$$

c) A função tem a forma:

$$y(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta)$$

onde $k = 2\pi/\lambda = 4{,}0\pi$ rad/m $= 12{,}6$ rad/m, e $\omega = 2\pi/\tau = 1{,}0\pi$ rad/s $= 3{,}14$ rad/s.
A amplitude pode ser extraída do gráfico: $A = 2{,}0$ mm

A constante de fase pode ser obtida através das seguintes condições:

$$\left.\begin{array}{lll} y(x=0,t=0) = A\cos\delta = 0 & \Rightarrow & \delta = \pm\pi/2 \\ y(x=\lambda/4,t=0) = +A\cos(\pi/2+\delta) & \Rightarrow & \cos(\pi/2+\delta) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \delta = -\pi/2$$

$$y(x,t) = A\cos(kx+\omega t-\pi/2) = A\,\mathrm{sen}(kx+\omega t)$$

d)

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\cos(kx+\omega t) \Rightarrow v_{y\text{máx}} = \omega A = 2{,}0\pi \text{ mm/s} = 6{,}3\times10^{-3} \text{ m/s}$$

$$a_y(x,t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(kx+\omega t) \Rightarrow a_{y\text{máx}} = \omega^2 A = 2{,}0\pi^2 \text{ mm/s}^2 = 19{,}7\times10^{-3} \text{ m/s}^2$$

e)

$$P = \tfrac{1}{2}\mu v(\omega A)^2 = \tfrac{1}{2}\mu v v_{y\text{máx}}^2 = 2{,}0\pi^2\times10^{-6} \text{ W} = 19{,}7\ \mu\text{W}$$

Questão 2 (2,5)

As oscilações transversais de uma corda tensionada e presa em suas duas extremidades são descritas pela função

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx)\cos(\omega t)\,, \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ cm}$$

onde $A = 0{,}50$ cm, $k = \frac{\pi}{3}$ cm^{-1} e $\omega = 40\pi$ rad/s.

(0,5): a) Quais são as amplitudes, as velocidades e os comprimentos de onda das ondas progressivas cuja superposição resulta nesta oscilação?

(1,0): b) Identifique os pontos da corda que têm a maior amplitude de oscilação e escreva a expressão para sua velocidade e aceleração em função do tempo.

(1,0): c) Quais são as outras frequências em que esta corda pode vibrar?

---

a)

$$y(x,t) = A_1\,\mathrm{sen}(kx + \omega\,t) + A_2\,\mathrm{sen}(kx - \omega\,t)$$
$$A_1 = A_2 = \tfrac{1}{2}A = 0{,}25 \text{ cm}$$
$$v_1 = v_2 = v = \frac{\omega}{k} = 120 \text{ cm/s}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{2\pi}{k} = 6{,}0 \text{ cm}$$

b)

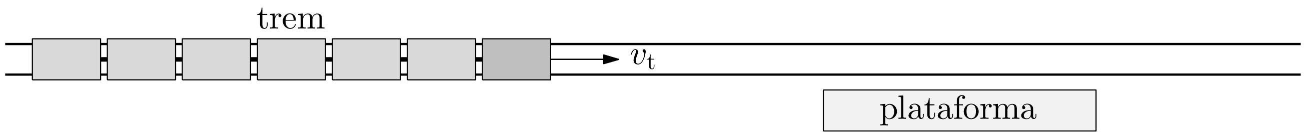
$$|\,\mathrm{sen}\,kx| = 1 \Rightarrow kx = \tfrac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \begin{cases} n = 0\text{:} \quad x_1 = \frac{\pi}{2k} = 1{,}5 \text{ cm} \quad (\mathrm{sen}\,kx_1 = +1) \\ n = 1\text{:} \quad x_2 = \frac{3\pi}{2k} = 4{,}5 \text{ cm} \quad (\mathrm{sen}\,kx_2 = -1) \end{cases}$$
$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{sen}\,\omega\,t \Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\omega\,t \\ v_2(t) = +\omega A\,\mathrm{sen}\,\omega\,t \end{cases}$$
$$a_y(x,t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}\,kx\cos\omega\,t \Rightarrow \begin{cases} a_1(t) = -\omega^2 A\cos\omega\,t \\ a_2(t) = +\omega^2 A\cos\omega\,t \end{cases}$$

c) A corda está presa em $x = 0$ e $x = L = 6{,}0$ cm

$$\mathrm{sen}\,kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n = 1,2,\ldots$$
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega = n\pi\frac{v}{L} = n20\,\pi \text{ rad/s}$$
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = n10 \text{ Hz}$$

Questão 3 (2,5)

Um trem que se move sobre trilhos retilíneos com velocidade constante de módulo $v_t = 30{,}0\ \mathrm{m/s}$ passa por uma plataforma em que se encontra um observador parado, como esboçado na figura. Tanto no trem quanto na plataforma existem sirenes que emitem um som de frequência $\nu_0 = 180\ \mathrm{Hz}$. A velocidade do som no ar ambiente é $v_s = 340\ \mathrm{m/s}$.



Na ausência de vento:

(1,0): a) Qual é a frequência do som da **sirene do trem** ouvido pelo observador enquanto ele se aproxima da plataforma? E quando se afasta, depois de passar por ela?

Suponha agora que haja um vento de $v_v = 36\ \mathrm{km/h}$ soprando na mesma direção e sentido da velocidade do trem.

(1,0): b) Qual é a frequência do som da **sirene da plataforma** ouvido pelo maquinista do trem enquanto ele se aproxima da plataforma? E quando se afasta, depois de passar por ela?

(0,5): c) Quais são os comprimentos de onda dos dois sons do item anterior?

Efeito Doppler

a) Efeito Doppler: fonte (sirene do trem) em movimento com velocidade de módulo $V = v_t = 30\ \mathrm{m/s}$ e observador em repouso $u = 0$ (ambas em relação ao ar).
Trem se aproximando:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - V/v_s} = 197{,}4\ \mathrm{Hz}.$$

Trem se afastando:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + V/v_s} = 165{,}4\ \mathrm{Hz}.$$

b) Efeito Doppler: fonte (sirene da plataforma) em movimento com velocidade de módulo $V = v_v = 36\ \mathrm{km/h} = 10\ \mathrm{m/s}$ e observador (maquinista) em movimento com velocidade de módulo $u = v_t - v_v = 20{,}0\ \mathrm{m/s}$ (ambas em relação ao ar).
Trem se aproximando pela frente da fonte em movimento:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + u/v_s}{1 - V/v_s} = 196{,}4\ \mathrm{Hz}.$$

Trem se afastando por trás da fonte em movimento:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - u/v_s}{1 + V/v_s} = 164{,}6\ \mathrm{Hz}.$$

c) Seja $\lambda_0 = v_s/\nu_0 = 1{,}889\ \mathrm{m}$ o comprimento de onda no ar para uma fonte em repouso. Para a fonte em movimento ($V = 10{,}0\ \mathrm{m/s}$), temos, no primeiro caso (à frente da fonte):

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - V/v_s\right) = 1{,}833\ \mathrm{m}$$

e no segundo (atrás da fonte):

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + V/v_s\right) = 1{,}944\ \mathrm{m}.$$

Questão 4 (2,5)

Um sistema para reduzir ruídos sonoros de baixa frequência pode ser instalado em carros e aviões. Seu funcionamento é baseado no princípio de interferência destrutiva, sendo capaz de reduzir (sem eliminar completamente) um som indesejável. Considere que este som indesejável tenha 80 Hz de frequência e nível sonoro de 70 dB e que possa ser representado por uma onda harmônica na forma

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t) \, .$$

(0,5): a) Considerando que o sinal gerado pelo aparelho terá o mesmo sentido de propagação que o som indesejado, qual a constante de fase δ_2 do sinal gerado pelo aparelho, para que ocorra a redução do sinal indesejado? Justifique sua resposta.

(0,5): b) A partir da intensidade fornecida, determine a amplitude da onda resultante da soma da onda gerada pelo aparelho com a do som indesejável, considerando que o nível sonoro deste será reduzido para 50 dB. Expresse seu resultado em função de A_1.

(0,5): c) Obtenha a função de onda do sinal gerado pelo aparelho $y_2(x,t)$ e da onda resultante $y(x,t)$ em termos de A_1, k e ω.

Considere o mesmo som indesejado de 80 Hz, mas agora com o sistema redutor ligeiramente desregulado, gerando um sinal com amplitude $A_2 = A_1$ e uma frequência de 84 Hz.

(0,5): d) No lugar da interferência destrutiva, que fenômeno ondulatório ocorre neste caso? Qual é o valor da amplitude máxima resultante?

(0,5): e) Qual é o período de batimento?

Interferência, Batimento

a) Para que haja interferência destrutiva, as duas ondas devem estar em oposição de fase, ou seja:

$$\delta_2 = \pi.$$

b) A redução será de 20 dB:

$$20 = 10\log_{10}(I_1/I) = 10\log_{10}(A_1^2/A^2) = 20\log_{10}(A_1/A) \Rightarrow A = \frac{1}{10}A_1$$

c) Da relação entre as amplitudes:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\pi) = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow A_2 = A_1 - A = \frac{9}{10}A_1$$

$$y_2(x,t) = \frac{9}{10}A_1\cos(kx - \omega t + \pi)$$

$$y(x,t) = \frac{1}{10}A_1\cos(kx - \omega t)$$

d) Neste caso ocorre o fenômeno de batimento. Sendo as amplitudes do som indesejado e do sinal do aparelho iguais ($A_1 = A_2$), a amplitude máxima de batimento será $A = 2A_1$.

e) A frequência de batimento é $\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1| = 4$ Hz. Dessa forma o período é de $\tau = 1/\Delta\nu = 0{,}25$ s.