Mecânica Quântica [09]

Coordenadas curvilíneas e momento angular

Exercício 01

Os sistemas cilíndrico e esférico de coordenadas são sistemas de referencial que permite a localização de um ponto qualquer em um espaço de formato cilíndrico ou esférico através de um conjunto de três valores, chamados de coordenadas cilíndricas, baseados nas coordenadas polares, e esféricas.

a) Escreva as expressões para o gradiente, a divergência, o rotacional e o Laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas.
b) Calcule:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Onde:

$$f(x, y, z) = z^2$$

Exercício 02

Sendo **J** o momento angular (que pode ser o **L** orbital, o spin **S**, ou $\mathbf{J}_{\text{total}}$). Utilizando o fato de que J_x, J_y, J_z ($J \pm \equiv J_x \pm iJ_y$) satisfaz as relações de comutação usuais para momento angular, prove que:

$$\boldsymbol{J}^2 = J_z^2 + J_+J_- - \hbar J_z$$

Exercício 03

Mostre que o operador **L** de momento angular orbital comuta tanto com $\mathbf{p}^2$ quanto $\mathbf{x}^2$.

Exercício 04

A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esfericamente simétrico $V(r)$ é dada por:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = (x + y + 3z) \cdot f(r)$$

a) Esta é autofunção de $\mathbf{L}^2$? Se for, qual o valor de l? Se não for, quais os possíveis valores de l que podemos obter quando $\mathbf{L}^2$ é medido?

b) Quais as probabilidades da partícula ser encontrada em vários estados m_l?

Exercício 05

O objetivo deste exercício é determinar autoestados degenerados do oscilador harmônico isotrópico tridimensional, escritos como autoestados de $\mathbf{L}^2$ e L_z e em termos dos autoestados cartesianos. Mostre que os operadores de momento angular são dados por:

$$L_i = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_j a_k^\dagger$$

$$\boldsymbol{L}^2 = \hbar^2[N(N+1) - a_k^\dagger a_k^\dagger a_j a_j]$$