Mecânica Quântica [08]

Oscilador Harmônico Quântico

Exercício 01

Nos problemas de mecânica quântica, referentes ao oscilador harmônico, temos definido os operadores quânticos: **criação**, **destruição** e **número**:

$$\mathbf{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x} - \frac{i\mathbf{P}}{m\omega}\right)$$
$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x} + \frac{i\mathbf{P}}{m\omega}\right)$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}$$

Baseado nisso, mostre que:

$$a)\ \mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$
$$\text{b) } \mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\text{c) } \left[\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}\right] = 1$$
$$\text{d) } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$
$$\text{e) } \mathbf{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathbf{a}^{\dagger} + \mathbf{a}\right)$$
$$\text{f) } \mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\mathbf{a}^{\dagger} - \mathbf{a}\right)$$

Exercício 02

Mostre que o estado fundamental e um estado físico arbitrário podem ser descritos por

$$\varphi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\mathbf{a}^{\dagger}\right)^n \varphi_0 \ .$$

Hugo Mello

Exercício 03

Considere a função de correlação:

$$C(t) = \langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(0) \rangle$$

Em que **x***(t)* é o operador posição na descrição de Heisenberg. Calcule a função de correlação de forma explicita para o estado fundamental de um oscilador unidimensional.

Exercício 04

Calcule algebricamente:

a) Construa uma combinação linear de $|0\rangle$ e $|1\rangle$ de tal maneira que $\langle x \rangle$ é o maior possível.

b) Suponha que o oscilador esteja no estado construído em (a) em $t = 0$. Qual o ket de estado para $t > 0$ na descrição de Schrödinger? Calcule o valor esperado $\langle x \rangle$ como função o tempo para $t > 0$ utilizando a (i) representação de Schrödinger e (ii) a representação de Heisenberg.

c) Calcule $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ como função do tempo usando ambas as representações.

Exercício 05

Um estado coerente de um oscilador harmônico simples unidimensional é definido como um auto estado do operador não Hermitiano de aniquilação **a**:

$$\mathbf{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

Onde λ é, em geral, um número complexo.

a) Prove que:

$$|\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2}\right)\exp\left(\lambda\mathbf{a}^\dagger\right)|0\rangle$$

É um estado normalizado coerente.

b) Prove a relação de incerteza mínima para este estado.

c) Escreva $|\lambda\rangle$ como

Hugo Mello

$$|\lambda\rangle = \sum_{0}^{\infty} f(n)|n\rangle$$

Mostre que a distribuição de $|f(n)|^2$ com relação a *n* é da forma de Poisson. Encontre o valor mais provável de *n*, portanto, de *E*.

Exercício 06

Considere um oscilador harmônico de massa *m* e frequência angular *ω*. No tempo *t = 0*, o estado do oscilador pode ser dado por:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n} c_n |\varphi_n\rangle$$

Onde os estados $|\varphi_n\rangle$ são estados estacionários com energia $(n+1/2)\hbar\omega$.

a) Qual a probabilidade *P* que a medida da energia do oscilador em um tempo arbitrário *t > 0*, dará um resultado maior que $2\hbar\omega$? Quando *P* = 0, quais são os coeficientes não zero c_n?

b) Assuma que apenas c_0 e c_1 são diferentes de zero. Escreva a condição de normalização para $|\psi(0)\rangle$ e o valor médio $\langle H\rangle$ de energia em termos de c_0 e c_1. Com a informação adicional $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.