Mecânica Quântica [06]

Observáveis e operadores de posição e momento, R e P.

Exercício 01

Considere um sistema físico cujo estado no espaço tridimensional é formado por uma base ortonormal com os kets $|u_1\rangle,\ |u_2\rangle,\ |u_3\rangle$. Nesta base, os operadores *H* e *B* são definidos:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os números ω_0 e *b* são constantes reais. (a) *H* e *B* são hermitianos? (b) Mostre que *H* e *B* comutam. Encontre uma base de autovetores comum à *H* e *B*.

Exercício 02

No mesmo espaço de estados do exercício 01, considere dois operadores, L_Z e *S*, definidos por:

$$L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad L_z|u_2\rangle = 0 \quad L_z|u_3\rangle = |-u_3\rangle$$
$$S|u_1\rangle = |u_3\rangle \quad S|u_2\rangle = |u_2\rangle \quad S|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

(a) Escreva as matrizes que representa, na base $|u_1\rangle,\ |u_2\rangle,\ |u_3\rangle$, os operadores L_Z, $(L_Z)^2$, *S*, S^2. Esses operadores são observáveis? (b) Qual a matriz mais genérica que representa um operador que comuta com L_Z? Para $(L_Z)^2$ e S^2 também.

Exercício 03

Mostre que um ket arbitrário descrito na base de posição e momento pode ser dado por:

$$|\psi\rangle = \int d^3 r_0\, |\mathbf{r}_0\rangle\langle\mathbf{r}_0|\psi\rangle$$
$$|\psi\rangle = \int d^3 p_0\, |\mathbf{p}_0\rangle\langle\mathbf{p}_0|\psi\rangle$$

Mostre que os coeficientes valem:

$$\langle \mathbf{r}_0 | \psi \rangle = \psi(\mathbf{r}_0)$$
$$\langle \mathbf{p}_0 | \psi \rangle = \overline{\psi}(\mathbf{p}_0)$$

Exercício 04

Determine: (a) $\langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ e (b) $\langle \mathbf{p} | \psi \rangle$.

Exercício 05

Considere uma partícula em uma dimensão cujo Hamiltoniano seja dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Prove, calculando [[H, x], x], que:

$$\sum_{a'} \left| \langle a'' | x | a' \rangle \right|^2 (E_{a'} - E_{a''}) = \frac{\hbar^2}{2m}$$

Onde $|a'\rangle$ é um autovetor de energia com autovalor $E_{a'}$.

Exercício 06

Considere x e p_x a coordenada e o momento linear em uma dimensão. (a) Calcule o colchete de Poisson clássico:

$$[x, F(p_x)]_{clássico}$$

(b) Sejam agora x e p_x os correspondentes operadores de mecânica quântica. Calcule o comutador:

$$\left[x, \exp\left(\frac{i p_x a}{\hbar} \right) \right]$$

(c) Usando o resultado obtido em (b), prove que:

$$\exp\left(\frac{i p_x a}{\hbar} \right) | x' \rangle$$

É um autoestado do operador coordenada x. Qual o autovalor correspondente?

Hugo Mello

Exercício 07

Prove que o operador **P** na base de ket de posição pode ser dado por:

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{P}|\psi\rangle = -i\hbar\langle \mathbf{r}'|\psi\rangle$$

Prove também que o operador **X** na base de ket de momento pode ser dado por;

$$\langle \mathbf{p}'|\mathbf{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle \mathbf{p}'|\psi\rangle$$

Mostre as relações de comutação canônicas, dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} \left[R_i, R_j\right] = 0 \\ \left[P_i, \mathrm{P}_j\right] = 0 \\ \left[R_i, \mathrm{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \end{array}\right\} i,\, j = 1, 2, 3$$

Exercício 08

Mostre que os operadores **P** e **X** são hermitianos. (Obs.: Para operador **P** utilize condição do exercício 07, operador momento na base de posição).

Exercício 09

Obtenha as relações de autovalores/autovetores para as componentes do operador “vetorial” **P** utilizando condição do exercício 07. Obtenha também as relações para o operador **X**. Porque o ket $|\mathbf{r}\rangle$ pode ser um bom autovetor simultâneo? Para a representação $|\mathbf{p}\rangle$ também?

Exercício 10

Obtenha a expressão para a Equação de Schrödinger na base dos kets de posição e momento, $|\mathbf{r}\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$, respectivamente, baseando-se nos operadores: posição, **R**, momento, **P**, e hamiltoniana, **H**. Mostre que a transformada de Fourier da Equação de Schrödinger na representação espacial se equivale à mesma equação na base de kets de momento.