

Mecânica Quântica [05]

Medidas de observáveis

Exercício 01

Dado um sistema representado por:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

Explique o que ocorre quando uma medida da observável A é feita. O que ocorre com o sistema? Qual o resultado do ato de medir sobre o sistema? O que o valor medido é em relação a observável A ? Discuta.

Exercício 02

Dado o ket:

$$|\Phi\rangle = 3|a\rangle + (2+i)|b\rangle + 2|c\rangle$$

Encontre as probabilidades de o sistema colapsar em cada um dos kets de base. O que isso significa? Qual o requerimento necessário para o ket, de forma a podemos obter as probabilidades? Discuta.

Exercício 03

Definindo valor esperado por:

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

Mostre que esta é similar à noção intuitiva de valor medido médio, dado por:

$$\langle A \rangle = \sum_{a'} a' |\langle a' | \alpha \rangle|^2$$

Exercício 04

Para sistema de spin $\frac{1}{2}$, mostre que os kets de estado de $S_{x\pm}$ e $S_{y\pm}$ e os operadores S_x e S_y em função dos kets do estado de spin S_z são dados por¹:

$$\begin{aligned} |S_x \pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \\ |S_y \pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \\ S_x &= \frac{\hbar}{2}[(|+\rangle\langle-|) + (|-\rangle\langle+|)] \\ S_y &= \frac{\hbar}{2}[-i(|+\rangle\langle-|) + i(|-\rangle\langle+|)] \end{aligned}$$

Exercício 05

Prove o teorema: Supondo A e B observáveis compatíveis ($[A, B] = 0$), com autovalores do operador A não degenerados. Então, os elementos de matriz:

$$\langle a'' | B | a' \rangle$$

São todos diagonais.

Exercício 06

Defina **autovetor simultâneo** e **índice coletivo**. Com base nesses conceitos, porque dizemos que se dois observáveis, A e B comutam, estes são "compatíveis"?

Exercício 07

Prove a desigualdade de Schwarz:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \cdot \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2$$

Exercício 08

Podemos definir o operador anti-hermitiano por $C = -C^\dagger$. Prove que seu valor esperado é um imaginário puro.

¹ Dica para o exercício: Há um teorema em mecânica quântica que diz que uma autofunção real é passível de ser descrita como uma função real vezes um fator de fase independente.

Exercício 09

Prove a relação de incerteza (que é a generalização da relação de incerteza conhecida para x e p), dada por:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Exercício 10

Mostre que o traço de um operador X :

$$\text{tr}(X) = \sum_a \langle a' | X | a' \rangle$$

Independe da base de *kets*.