

Mecânica Quântica [03]

Operadores, observáveis e representação matricial

Exercício 01

Porque $|\beta\rangle\langle\alpha|$ pode ser interpretado como um operador? Se o operador X é o operador **produto externo**,

$$X = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

Mostre então que:

$$X^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|.$$

Exercício 02

Considerando um operador X hermitiano, mostre que:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X|\beta\rangle^*$$

Exercício 03

Prove o seguinte teorema: Os autovalores de um operador hermitiano A são reais; os autovetores de A , correspondentes aos diferentes autovalores, são ortogonais. Utilize as propriedades de operadores hermitiano e espaço de *bras*.

Exercício 04

Dado um espaço gerado pelos autoestados de A , faça: (a) expandir um *ket* arbitrário $|\alpha\rangle$ em função dos *kets* gerados pelos autovetores de A . (b) mostre que os coeficientes deste *ket* podem ser obtidos em função do produto interno entre os autovetores e o *ket* arbitrário:

$$c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$$

Exercício 05

Pela representação matricial de operadores, mostre que: (a) Para um operador hermitiano, a operação adjunta hermitiana, definida por:

$$X|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|X^\dagger$$

Pode ser relacionada ao conceito de *transposta complexa conjugada*, (b) que a representação matricial para linhas e colunas:

$$\langle a''|X|a'\rangle.$$

Está de acordo com regras usuais de multiplicação de matrizes.

Exercício 06

Mostre que, dado um operador A , que é um observável, utilizando seus autovetores como vetores da base, o operador A pode ser descrito matricialmente pelo **operador de projeção**:

$$A = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}$$

Exercício 07

Para um sistema de spin $\frac{1}{2}$, temos que os kets da base podem ser representados por $|\pm\rangle$. Então faça: (a) represente o operador identidade; (b) represente o operador spin eletrônico, S_z a partir do operador de projeção; (c) demonstre a relação autovetor-autovalor a partir da ortogonalidade dos kets da base; e (d) considere os operadores S_+ e S_- , dados por:

$$S_+ \equiv \hbar|+\rangle\langle-| \text{ e } S_- \equiv \hbar|-\rangle\langle+|$$

Represente os kets da base e os três operadores matricialmente.