

Física para Engenharia II

4320196 (FEP2196)

Turma 2011211 – Sala C2-13

3as – 15h00 / 5as – 9h20.

Prof. Antonio Domingues dos Santos

Depto. Física Materiais e Mecânica – IF – USP

Ed. Mário Schemberg, sala 205

adsantos@if.usp.br

Página do curso ([Stoa -> Cursos -> IF -> Poli -> 4320196](#))

<http://moodle.stoa.usp.br/course/view.php?id=722>

Módulo 3 – Ondas e Referenciais não inerciais

- **Módulo 3 (9 aulas):**
 - Ondas.
 - Forças de Inércia, referenciais não inerciais, sistemas de coordenadas curvilíneas.

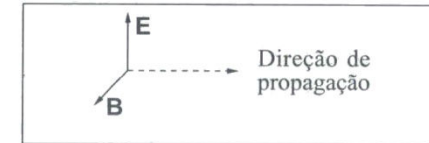
Bibliografia:

- H. Moisés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 – Capítulo 5 (Ondas) e Capítulo 6 (Som).
- P. Boulos e D.L. Zagottis, Mecânica e Cálculo, vol 1 (Ed. Edgard Blücher, 2000) – Capítulo 17 (Sistemas de coordenadas curvilíneas).
- H. Moisés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 1 - Capítulo 13 (Forças de Inércia).

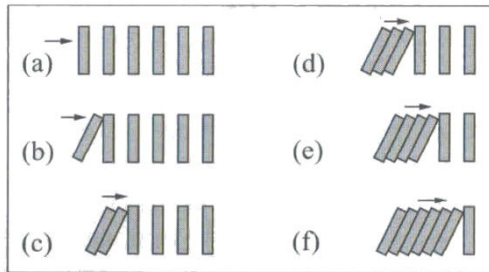
Ondas

Oscilações em meios quaisquer se constituem em ondas.

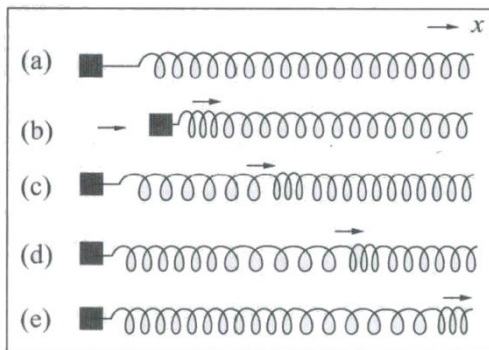
Existem ondas mecânicas, acústicas, eletromagnéticas, sísmicas, ...



Os meios podem ser uni, bi ou tridimensionais.

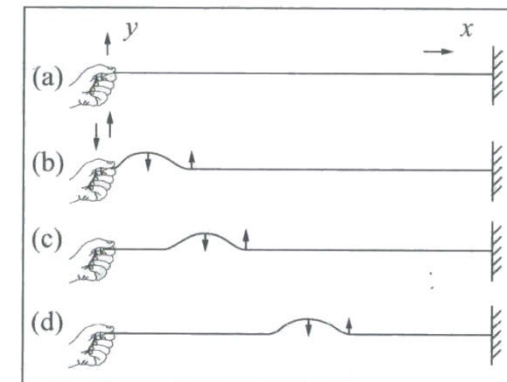


Onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida.



Onda longitudinal

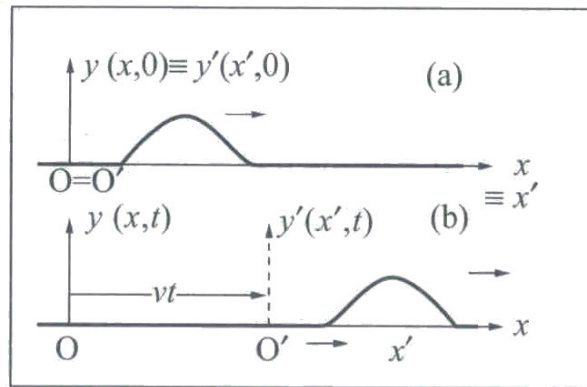
Onda transporta energia e momento, sem o transporte direto de matéria.



Onda transversal

Ondas unidimensionais

No referencial O , vamos considerar uma corda e um pulso (onda progressiva) com formato $y(x,t)$ caminhando como um todo para a direita.



Para um outro referencial (O') que se desloca com a mesma velocidade v da onda, o formato da onda é fixo

$$y'(x',t) = y'(x',0) = f(x')$$

Onde: $x' = x - vt$

Assim, temos: $y(x,t) = f(x - vt)$

Para um pulso no sentido inverso: $y(x,t) = g(x + vt)$

Solução geral

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Ondas unidimensionais

- ondas harmônicas

Uma solução particular e muito comum é o perfil senoidal.

$$f(x') = A \cos(kx' + \delta)$$

$$\therefore y(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \delta]$$

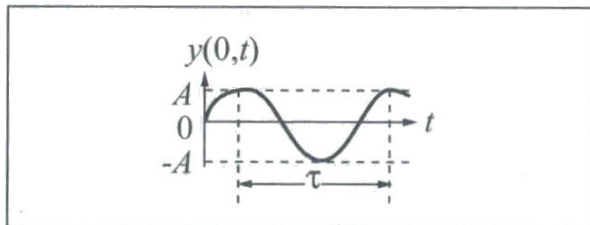
Onde a frequência angular é

$$\omega = kv = 2\pi f = 2\pi / \tau$$

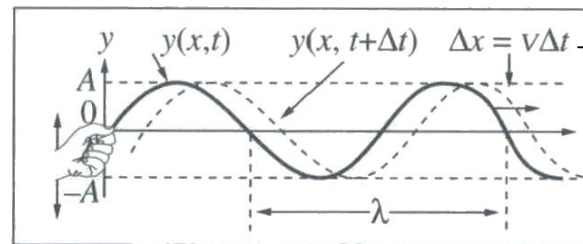
Assim, temos

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

para $x = 0$



$$\tau = \lambda / v \quad \text{Período da oscilação}$$



para $\Delta x = 2\pi$

Temos o comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Onde k é o número de onda

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t + \delta$$

É a fase da onda.

Ondas unidimensionais

- ondas harmônicas

Fase da onda.

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t + \delta$$

Para uma fase constante

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 = \text{const.}$$

temos

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v = f\lambda$$

v é chamado de
velocidade de fase

$$\tau = \lambda / v$$

A onda harmônica também pode ser expressa com notação complexa

$$y(x, t) = \text{Re}\{Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}\}$$

Ondas unidimensionais

- equação de onda

Uma solução geral

$$\begin{cases} y(x, t) = f(x') \\ x' = x - vt \end{cases}$$

velocidade $\frac{d}{dt} y(x, t) = -v \frac{df}{dx'}$

aceleração

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y(x, t) &= -v \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dx'} \right) = \\ &= -v \frac{d}{dx'} \left(\frac{df}{dx'} \right) \frac{dx'}{dt} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} \end{aligned}$$

mas $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx'} \frac{dx'}{dx} = \frac{df}{dx'}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

portanto

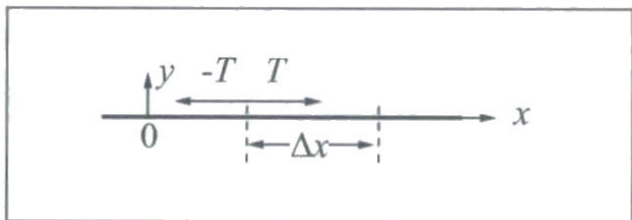
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Válida para $+v$ e $-v$.

Ondas unidimensionais

- cordas vibrantes

Vamos considerar oscilações transversais em uma corda distendida por uma tensão T , homogênea ao longo da corda. Os deslocamentos transversais são pequenos e não afetam a tensão T .

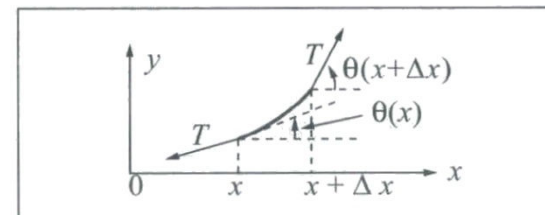


A densidade linear de massa na corda é

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Equação de ondas

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$



A componente transversal da tensão em um ponto é

$$T \sin \theta \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

Um trecho Δx fica submetida a uma força transversal

$$\begin{aligned} T \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) &= \\ &= T \Delta x \left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right] = \\ &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x \end{aligned}$$

Ondas unidimensionais

- cordas vibrantes

Usando a segunda lei de Newton, temos

$$F_y = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x$$

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x$$

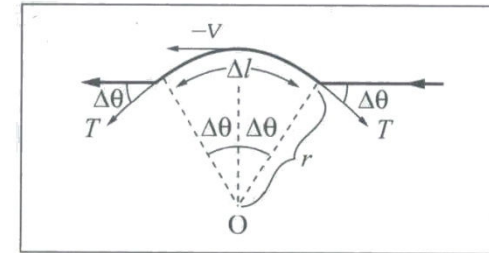
$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Portanto: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Equação de ondas

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Forma alternativa (no referencial que se desloca com o pulso):



$$T \sin \Delta \theta + T \sin \Delta \theta \approx 2T \Delta \theta = T \frac{\Delta l}{r}$$

o trecho Δl fica submetido a uma força centrípeta

$$T \frac{\Delta l}{r} = \Delta m \frac{v^2}{r} = \mu \Delta l \frac{v^2}{r}$$

Portanto: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Ondas unidimensionais

- cordas vibrantes

Solução geral

Vamos considerar as condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x, 0) = y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) \end{cases}$$

Onde:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Portanto, a solução geral envolve a composição de ondas se propagando para a esquerda e a direita.

Equação de ondas

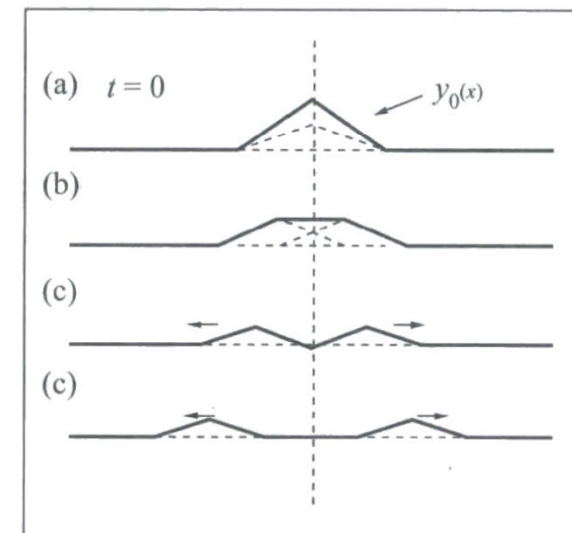
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Particularizando para v inicial nula:

$$\begin{cases} y(x, 0) = y_0(x) = f(x) + g(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = -v \frac{d}{dx} f(x) + v \frac{d}{dx} g(x) = 0 \\ = -v \frac{d}{dx} (f(x) - g(x)) = 0 \end{cases}$$

Portanto: $f(x) = g(x) = \frac{1}{2} y_0(x)$

Exemplo:



Ondas unidimensionais

- cordas vibrantes

Princípio da superposição

A combinação linear de duas soluções particulares da equação de onda, também é uma solução desta equação.

$$y(x, t) = ay_1(x, t) + by_2(x, t)$$

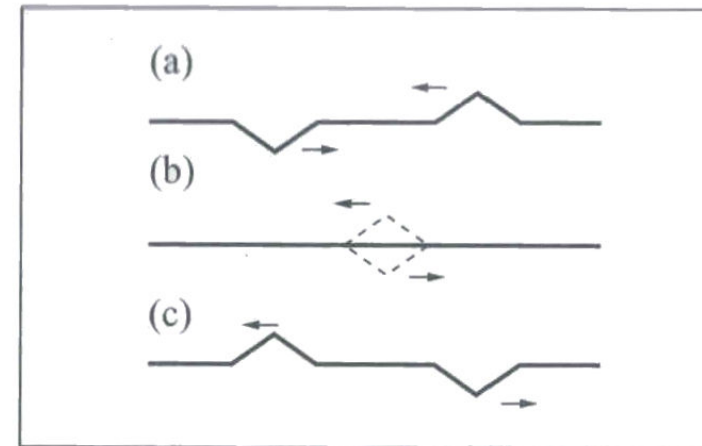
demonstração:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y = \frac{d^2}{dt^2} [ay_1 + by_2] = a \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b \frac{d^2 y_2}{dt^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{d^2}{dx^2} [ay_1 + by_2] = a \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b \frac{d^2 y_2}{dx^2} \end{cases}$$

Equação de ondas

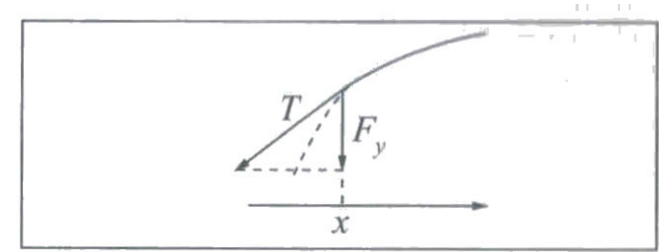
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Exemplo:



Ondas unidimensionais

- cordas vibrantes



Intensidade de uma onda

Uma onda progressiva transporta energia.

Para um MHS, qual a energia possível de ser transferida em um ponto qualquer da corda?

A força transversal é restitutiva

$$F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

A potência disponível é:

Considerando-se uma onda harmônica, temos:

$$P(x, t) = \omega k T A^2 \sin^2(kx - \omega t + d)$$

Definimos a “Intensidade” (I) da onda como a média sobre um período, da potência.

$$I = \bar{P} = \omega k T A^2 \overline{\sin^2(kx - \omega t + d)}$$

Portanto:

$$I = \bar{P} = \frac{1}{2} \omega k T A^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$$

Equação de ondas

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Usando-se: $kv = \omega$ $T = \mu v^2$

Interferência de Ondas

Ondas no mesmo sentido

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{cases}$$

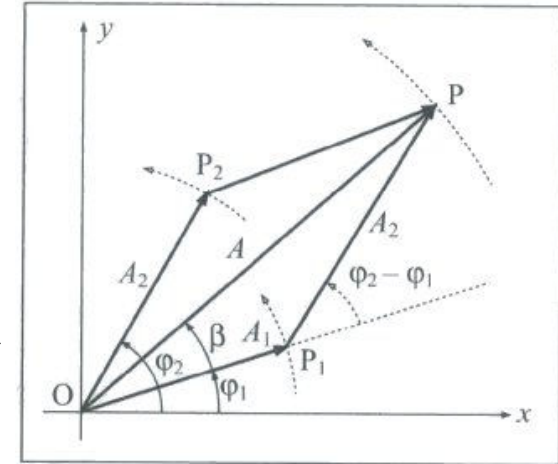
$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_{12})$$

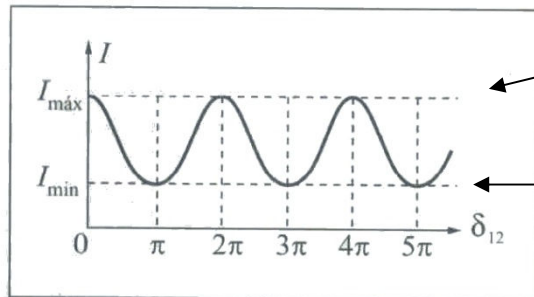
com: $\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$

Como ω é o mesmo, temos para a Intensidade:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_{12})$$



Para:



$$\delta_{12} = 2m\pi (m = 0, \pm 1, \dots) \Rightarrow I = I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$\delta_{12} = (2m + 1)\pi (m = 0, \pm 1, \dots) \Rightarrow I = I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

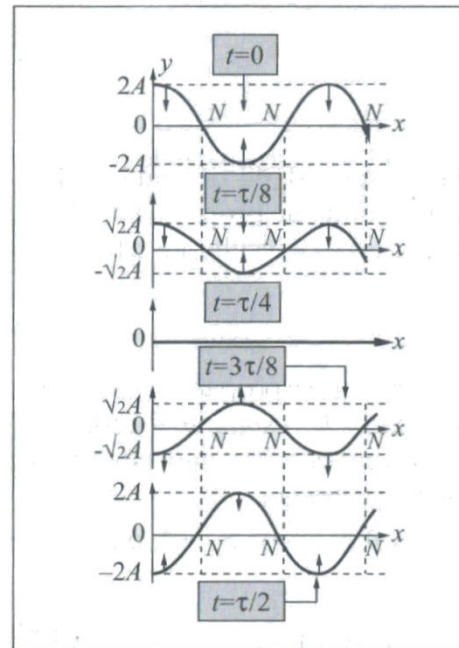
Interferência de Ondas

Ondas em sentido oposto

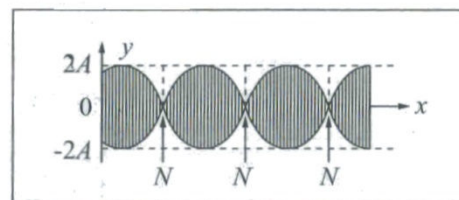
$$\begin{cases} y_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) = A \cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$y(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$$

É uma onda estacionária!



Perfis instantâneos



Aspecto visual de onda estacionária

Interferência de Ondas

Ondas no mesmo sentido, mas com frequências ligeiramente diferentes

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases}$$

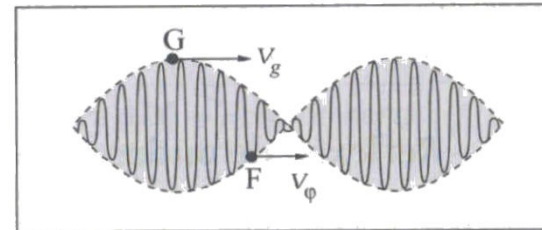
$$\begin{cases} (\omega_1 + \omega_2) / 2 = \bar{\omega} \\ (\omega_1 - \omega_2) = (\Delta\omega) \\ (k_1 + k_2) / 2 = \bar{k} \\ (k_1 - k_2) = (\Delta k) \end{cases}$$

É uma onda estacionária!

$$y(x, t) = a(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$a(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Batimentos !



Grupo de ondas

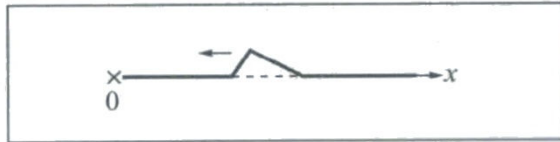
$$\varphi(x, t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t \Rightarrow v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

Velocidade
de fase e
de grupo

$$\varphi(x, t) = \frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t \Rightarrow v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Reflexão de Ondas

Consideremos um pulso:



$$y(x, t) = g(x + vt)$$

Solução geral

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (0, t) =$$

Mas como $y(0, t) = 0$

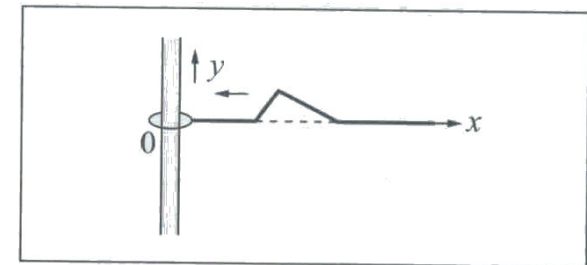
$$f(-vt) = -g(vt)$$

generalizando

$$f(x - vt) = -g(vt - x)$$

Solução geral

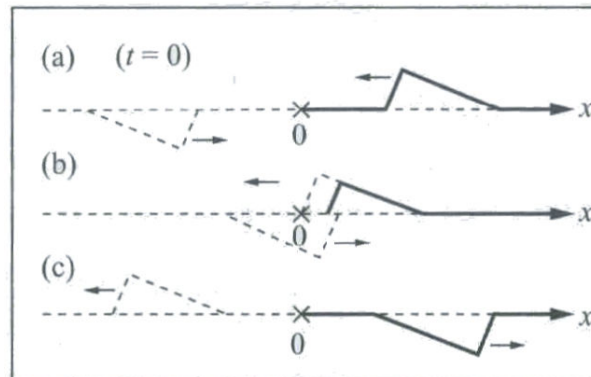
$$y(x, t) = g(x + vt) - g(vt - x)$$



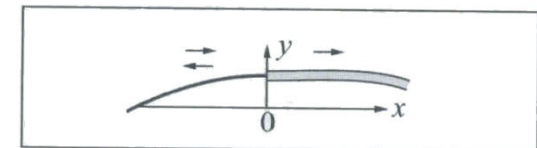
Extremidade livre

$$F_y(0, t) = -T \frac{dy}{dx}(0, t) = 0$$

$$y(x, t) = g(x + vt) + g(vt - x)$$



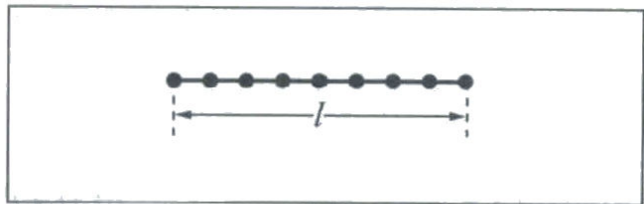
Reflexão numa extremidade fixa



Junção de duas cordas

Modos normais de vibração

Corda presa nos dois extremos:



Corda como limite de
osciladores acoplados

Os modos normais são as ondas
estacionárias que se estabelecem com as
condições de contorno (para qualquer t)

$$y(0, t) = y(l, t) = 0$$

Todos os pontos da corda oscilam com as
mesmas frequência e fase

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta)$$

Aplicando-se na equação de onda, temos

$$\frac{1}{v^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$-\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \delta) = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \delta)$$

$$-\frac{\omega^2}{v^2} A(x) = \frac{d^2 A}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0$$

Com $k = \omega/v$

Solução geral

$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

com as condições de contorno

$$A(0) = A(l) = 0$$

$$A(0) = a \cos(0) + b \sin(0) = 0$$

$$\therefore a = 0$$

Modos normais de vibração

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0$$

Com $k = \omega/v$

Solução geral $A(x) = b \sin(kx)$

$$A(l) = b \sin(kl) = 0$$

$$\therefore kl = n\pi$$

$$\therefore k_n = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}$$

Como $k = \omega/v$

$$\omega_n = vk_n = \frac{n\pi}{l} v \Rightarrow n = 1, 2, \dots$$

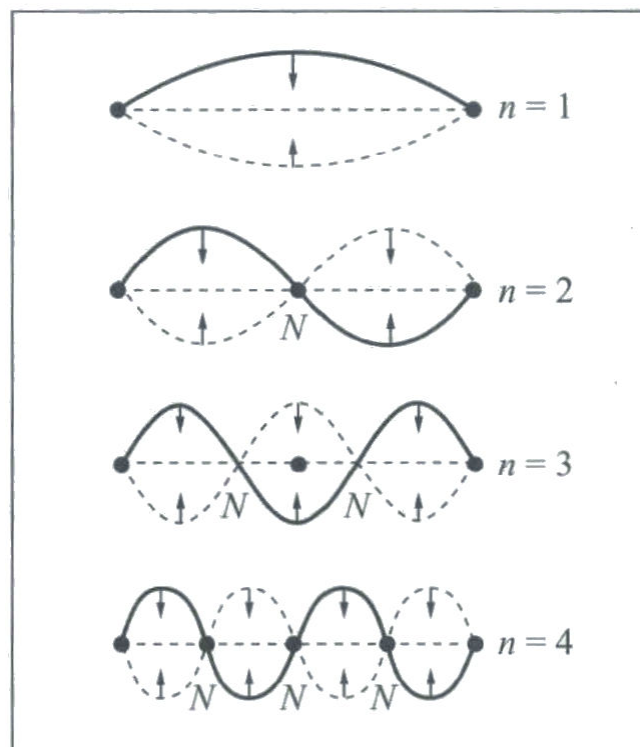
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nv}{2l}$$

Solução geral para a corda

$$y_n(x, t) = b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$y_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right)$$

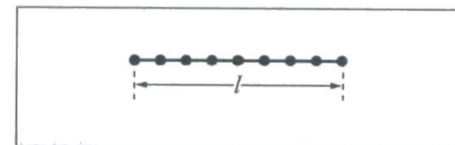
Para $n = 1, 2, 3, \dots$



Modos normais de vibração

Importante:

Para N osciladores acoplados, existem N modos normais de vibração.



Corda como limite de osciladores acoplados

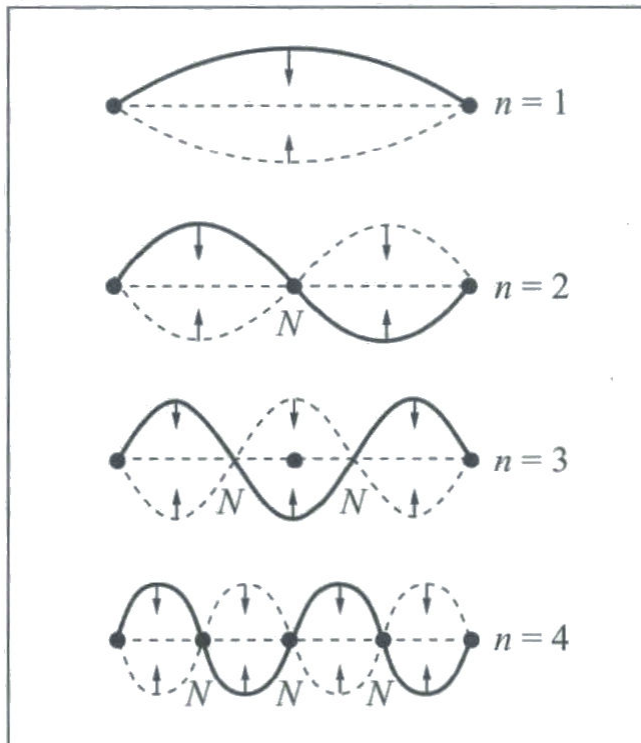
Análise de Fourier

Solução geral para a corda

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$$

$$y_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right)$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

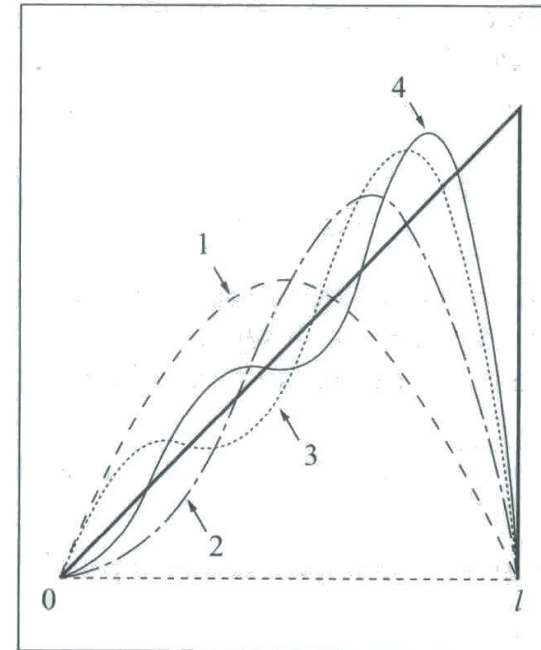


Modos normais de vibração

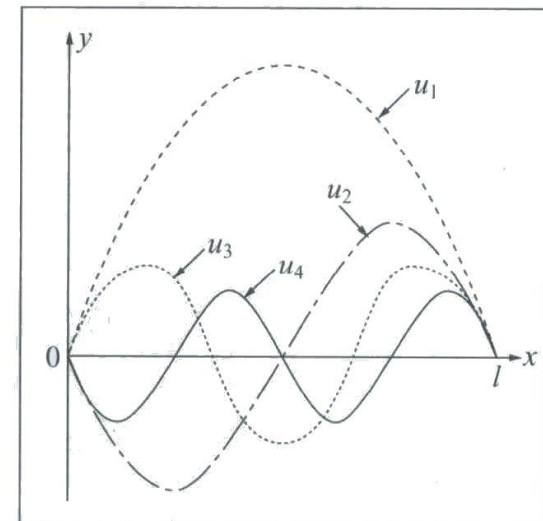
Condições iniciais e de contorno, permitem a definição de b_n e δ_n .

Importante:

Quanto maior for o n , melhor é a aproximação para a função considerada.



Aproximações de Fourier de uma função triangular

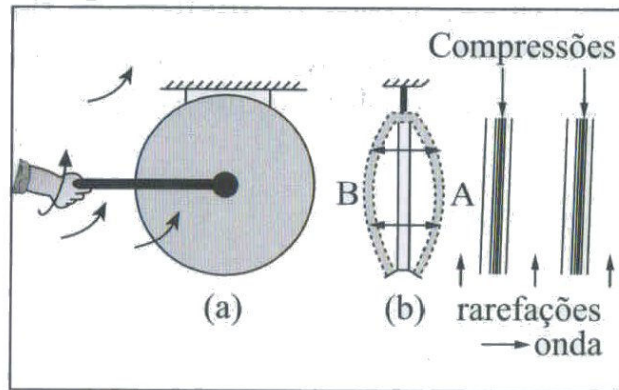


Componentes de Fourier

Som

O Som se caracteriza por efeitos ondulatórios que se propagam através de meios materiais, como fluídos (líquidos e gases) e sólidos.

Ondas sonoras são ondas longitudinais, associadas a variações de pressão



Gongo percutido

