Aula 19: Interferência de Ondas, Reflexão e Modos Normais de Vibração

Profª Nair Stem
Instituto de Física da USP

Interferência de Ondas
- Mesmo Sentido

Considere a superposição de duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência, que se propagam para a direita:

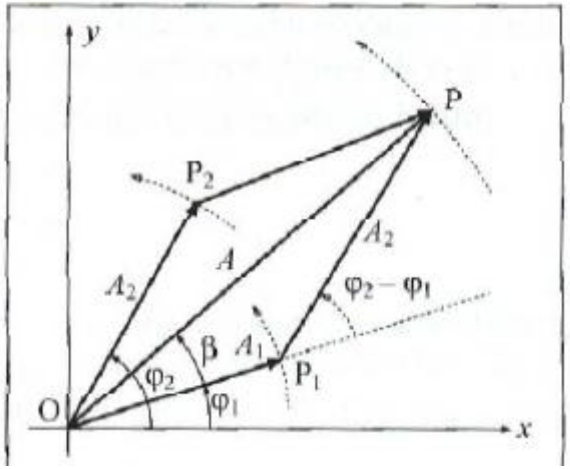
$$\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{cases}$$

onde

$$\cos(kx - \omega t + \delta) = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = -kx - \delta$$

Lembrete (Capítulo 3 – item 3.5)



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Superposição

Lei dos cossenos

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Lei dos Senos

$$\frac{A_2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{A}{\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \left\{ \boxed{\operatorname{sen}\beta = \frac{A_2}{A}\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)} \right.$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)}$$

Analogamente...

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Somando as duas equações de onda (progressivas, se propagando para a direita)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}$$

Pela lei dos cossenos

onde

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1}$$

Considerando que a Intensidade de uma onda é proporcional à sua amplitude ao quadrado, como demonstrado na aula passada:

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

Pode-se escrever: $I_1=(1/2)\mu v w^2 A_1^2$ e $I_2=(1/2)\mu v w^2 A_2^2$

Note que v e w são iguais nas duas ondas consideradas

Substituindo

$I_1=(1/2)\mu v w^2 A_1^2$ e $I_2=(1/2)\mu v w^2 A_2^2$

na equação: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ \cos\delta_{12}}$$

Superposição de duas ondas progressivas que se propagam na mesma direção e sentido é outra onda de mesmo tipo, mas a intensidade resultante depende da diferença de fase entre elas δ_{12} => INTERFERÊNCIA

Interferência Construtiva e Interferência Destrutiva

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta_{12}}$$

- Intensidade resultante é máxima => interferência construtiva ($\cos\delta_{12}=1$) => $\delta_{12}=2\pi m$ (m=0, ± 1, ± 2,...)

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

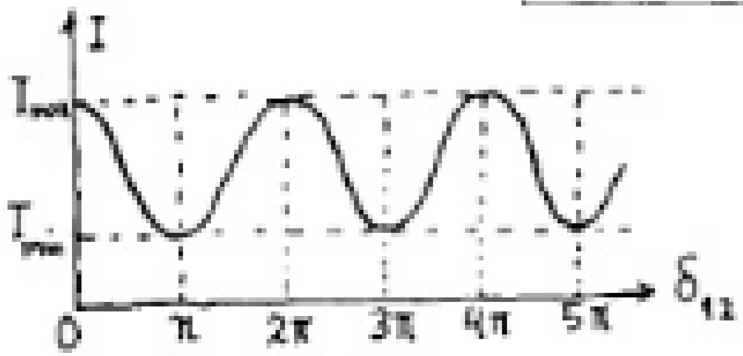
- Intensidade resultante é mínima=> interferência destrutiva ($\cos\delta_{12}=-1$) => $\delta_{12}=(2m+1)\pi$ (m=0, ± 1, ± 2,...)

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

E para valores intermediários?

Para valores intermediários...

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta_{12}$$



A intensidade oscilará entre o I_{max} e o I_{min}.

Por exemplo, **se $I_1=I_2$** ⇒ $I=2I_1+2I_1\cos\delta_{12}$

I_{max} ⇒ $\cos\delta_{12}=1$ ⇒ $I_{max}=4I_1$

I_{min} ⇒ $\cos\delta_{12}=-1$ ⇒ $I_{min}=0$

Interferência: ondas em sentidos opostos **(ONDAS ESTACIONÁRIAS)**

Agora considere as ondas que se propagam em sentidos opostos. Por simplificação elas terão a mesma amplitude A e constante de fase nula:

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

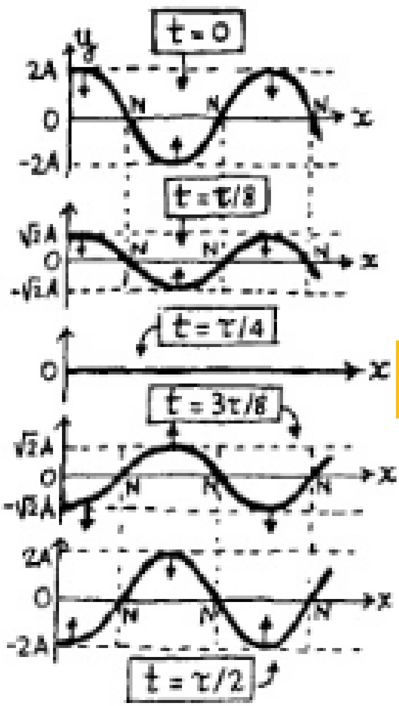
A soma das duas ondas resulta em:

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$

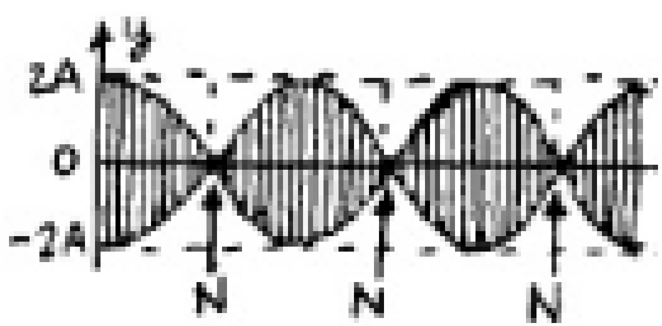
Característica principal destas ondas: Possuem fluxos de energia iguais e contrários resultando em um fluxo médio nulo.
Não se propagam!!!! Observe a seguir...

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Para um dado valor de tempo, a função permanece semelhante variando apenas a amplitude.



coswt=0



Fotografia com tempo de exposição longo. Os pontos N são os nodos e os pontos intermediários são os ventres ou antinodos.

Batimentos, velocidade de grupo

Supondo agora, que as ondas se propagam no mesmo sentido, com mesma amplitude, contudo com frequências e números de onda ligeiramente diferentes.

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases}$$

Definindo então
Δw e Δk:

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 << \bar{\omega} = \dfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \\ \Delta k = k_1 - k_2 << \bar{k} = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}}$$

Dica: Rever item 3.5 do Moysés Nussenzveig – Superposição de Harmônico Simples

Supondo $w_1 > w_2 \Rightarrow k_1 > k_2$. Lembre-se: $w = kv$

$$y = y_1 + y_2 = A\left\{\cos\left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta \omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta \omega}{2}\right)t\right]\right\}$$

Utilizando as relações trigonométricas e expandindo a equação acima:

cos(a - b) = cos a · cos b + sen a · sen b

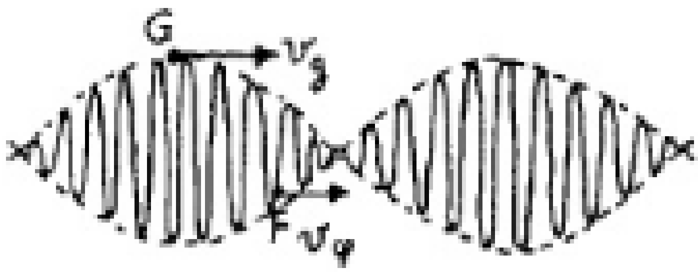
cos(a + b) = cos a · cos b - sen a · sen b

$$\boxed{y(x,t) = a(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}$$

$$\boxed{a(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)}$$

Amplitude dependente do tempo

Batimento



$$y(x,t) = a(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$a(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Uma onda de frequência w elevada cuja amplitude a é modulada por outra onda de frequência Δw bem mais baixa.

Fase $\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{w}t$

Velocidade de fase $V_\varphi = \dfrac{\bar{w}}{\bar{k}}$

(velocidade em um ponto de fase constante, F)

Velocidade de Grupo (ponto G, ponto da envoltória)

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

(a derivada deve ser calculada para $k = \bar{k}$)

Em uma corda vibrante homogênea...

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{T/\mu} = \text{constante}$$

Neste caso, a velocidade de grupo e a velocidade de fase são coincidentes

$$v_g = v_p = v$$

Reflexão de Ondas

Considere um pulso que se propaga para esquerda. A corda está com a extremidade fixa em O:

$$y(x,t) = g(x+vt)$$

Pulso incidente

Condição de contorno: extremidade fixa em x=0 => y(0,t)=0 para qualquer t.

$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{Pulso após atingir O}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{Pulso Incidente}}$$

Utilizando a condição de contorno:

$$y(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0 \Rightarrow f(-vt) = -g(vt)$$

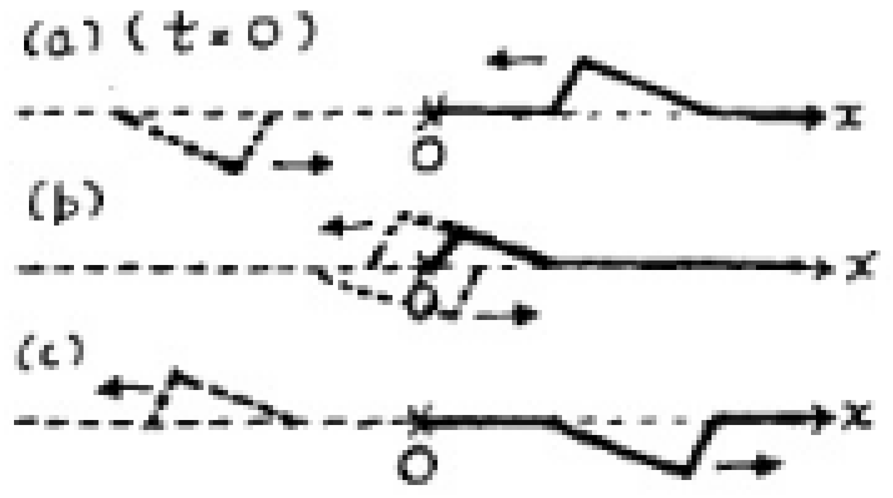
Para x diferente de zero: $\boxed{f(x') = -g(-x')}$

Onde x'=x-vt $f(x - vt) = -g(vt - x)$

Solução Geral: y(x,t)=g(x+vt)-g(vt-x)

Só existe após atingir a extremidade está fixa: PULSO REFLETIDO

EXTREMIDADE FIXA: DEFASAGEM DE 180º



Prolongamento fictício da corda

Linha cheia – pulso
Linha contínua – pulso imaginário

REFLEXÃO EM UMA EXTREMIDADE FIXA PRODUZ UMA DEFASAGEM DE 180º: EXTREMIDADE DA CORDA FIXA TEVE QUE REAGIR PARA PERMANECER FIXA.

EXTREMIDADE LIVRE

Extremidade presa a um anel de massa desprezível que desliza sem atrito sobre uma haste.

Condição de contorno

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

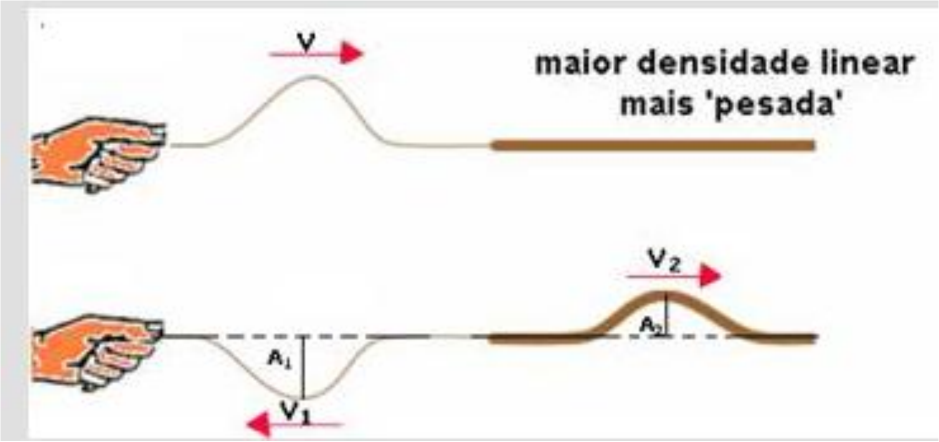
$$F_y(0,t) = -T\,\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = f'(-vt) + g'(vt) = 0 \quad \text{para qualquer } t$$

f’(x’)=g(-x’) => y(x,t)=g(vt+x)+g(vt-x)

ÉXTREMIDADE LIVRE O PULSO É REFLETIDO SEM MUDANÇA DE FASE.

JUNÇÃO ENTRE DUAS CORDA COM DENSIDADE LINEAR DE MASSA DIFERENTE



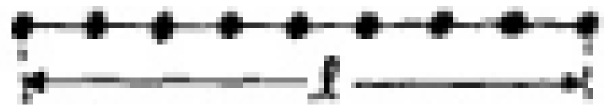
Ver apêndice

▪ONDA VINDO DA ESQUERDA AO ATINGIR A JUNÇÃO => ONDA REFLETIDA NA CORDA DA ESQUERDA E TRANSMITIDA NA CORDA DA DIREITA.

MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

Considerar corda vibrante de comprimento finito l, presa em ambas as extremidades.

Tratamento escolhido inicialmente: Ondas estacionárias, que correspondem aos modos normais, Vamos considerar os modos normais de vibração de uma corda como caso limite de um sistema de N osciladores acoplados, de massas μl/N e comprimento total l, igualmente espaçados. Qdo N-> infinito, os modos normais do sistema se assemelham ao da corda.



Condição de contorno: y(0,t)=y(l,t)=0 para qualquer t

Todos os elementos da corda oscilam com w e mesma constante de fase:

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta)$$

Cada ponto de x oscila com Amplitude Característica do Modo

LEMBRETE: ONDAS ESTACIONÁRIAS

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

EQUAÇÃO DE ONDA

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x)\cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{d x^2}\cos(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{\frac{d^2 A}{d x^2} + k^2 A = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{v}}$$

SOLUÇÃO GERAL

$$A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$$

Condição de contorno

$$A(0) = A(l) = 0$$

EXTREMIDADES FIXAS

PRIMEIRA CONDIÇÃO DE CONTORNO

$$A(0) = a = 0 \quad \{ \quad A(x) = b\,\mathrm{sen}(kx)$$

SEGUNDA CONDIÇÃO DE CONTORNO

$$A(l) = b\,\text{sen}(kl) = 0$$

Para que b seja diferente de 0 e y (x,t) também, o argumento do seno deve ser um múltiplo inteiro de π :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

Frequências dos Modos Normais de Vibração

$$\boxed{\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l} v}$$

Função $y_n(x,t)$

$$y_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

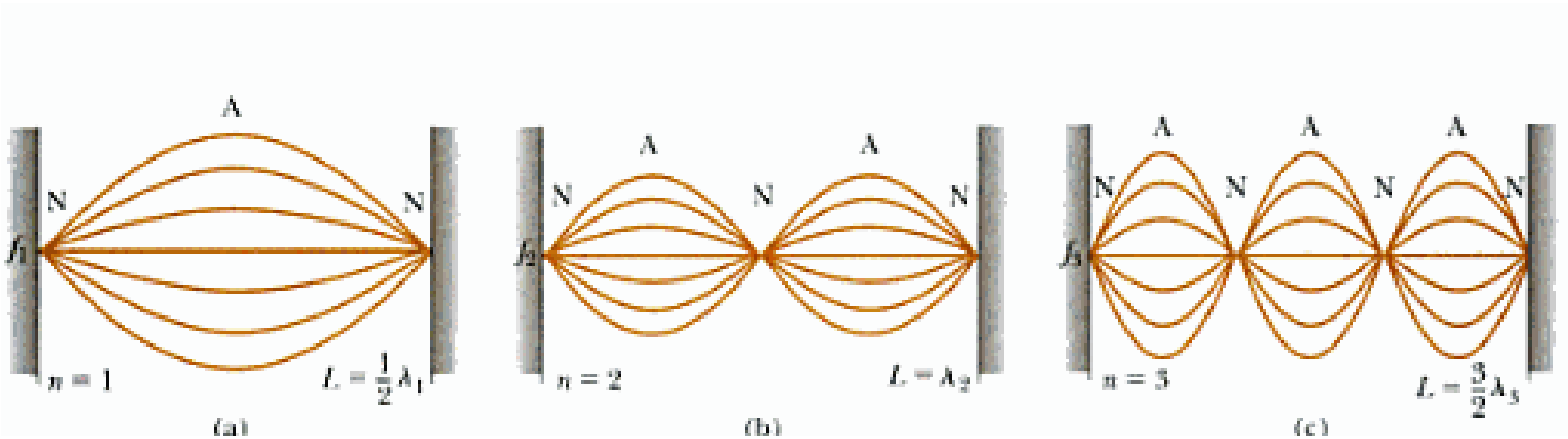
$$y_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}vt + \delta_n\right)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

PODE-SE DEFINIR O COMPRIMENTO DE ONDA, λ_n ASSOCIADO AO MODO N:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\,l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

MODOS DE VIBRAÇÃO



Osciladores Harmônicos

Para N osciladores há N modos normais de vibração transversal na direção y. A frequência ν_n de modo n é:

velocidade

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\,\frac{v}{2\,l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$W_n = k_n v = n(\pi/l)v$

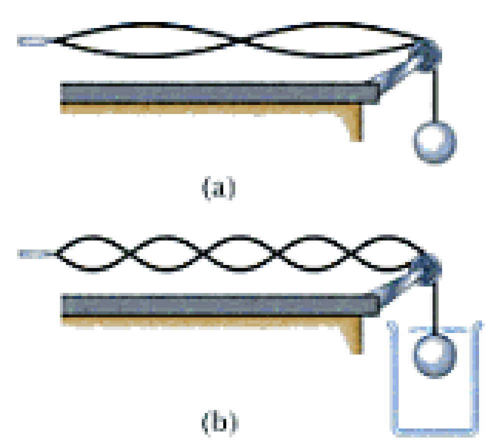
$$\nu_n = n\,\nu_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\nu_1 = \frac{v}{2\,l} = \frac{1}{2\,l}\sqrt{T/\mu}$$

Modo fundamental

Alterando a frequência de vibração de uma corda com água:

Considere uma corda conectada a um vibrador. A extremidade da direita passa por uma polia . Uma esfera de massa m=2kg está suspensa na extremidade direita da corda e está vibrando no segundo harmônico. Um recepiente com água é colocado de forma que a esfera fique subm ersa, e a corda passa vibrar no 5º harmônico. Qual é o raio da esfera?



Solução

Considere uma partícula no equilíbrio, a força resultante na esfera suspensa (sem a água) será

$$\sum F = T_1 - mg = 0$$

$$T_1 = mg = (2.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 19.6 \text{ N}$$

A força resultante ao imergir a esfera na água

$$T_2 + B - mg = 0$$

$$(1) \quad B = mg - T_2$$

Onde B é o empuxo

Escrevendo as frequências normais de vibração antes e após a imersão na água:

$$f = \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$$
$$f = \frac{n_2}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Lembrete

$$\boxed{\begin{gathered} \nu_n = n\,\nu_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ \nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{T/\mu} \end{gathered}}$$

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 (19.6\text{ N}) = 3.14\text{ N}$$

Agora conseguimos calcular o empuxo:

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 (19.6\ \mathrm{N}) = 3.14\ \mathrm{N}$$

$$B = mg - T_2 = 19.6\ \mathrm{N} - 3.14\ \mathrm{N} = 16.5\ \mathrm{N}$$

$$B = \rho_{\mathrm{water}} g V_{\mathrm{sphere}} = \rho_{\mathrm{water}} g \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

... E portanto o raio da esfera.

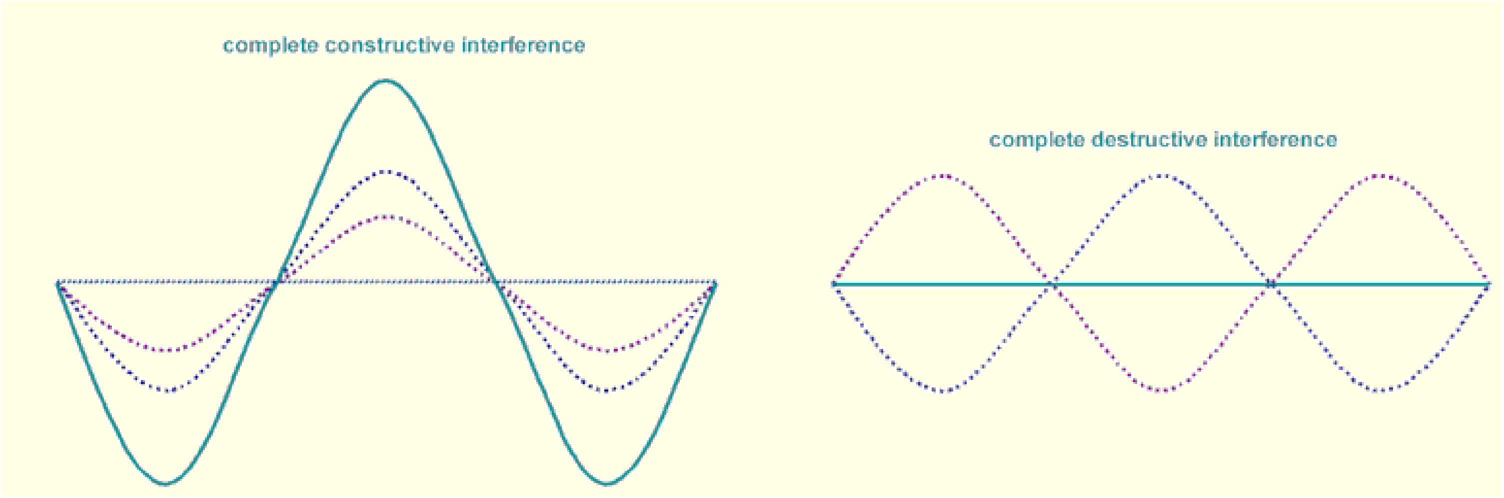
$$r = \left(\frac{3B}{4\pi\rho_{water}g}\right)^{1/3} = \left(\frac{3(16.5\ \mathrm{N})}{4\pi(1\,000\ \mathrm{kg/m^3})(9.80\ \mathrm{m/s^2})}\right)^{1/3}$$

$$= 7.38 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} = 7.38\ \mathrm{cm}$$

Raio da esfera

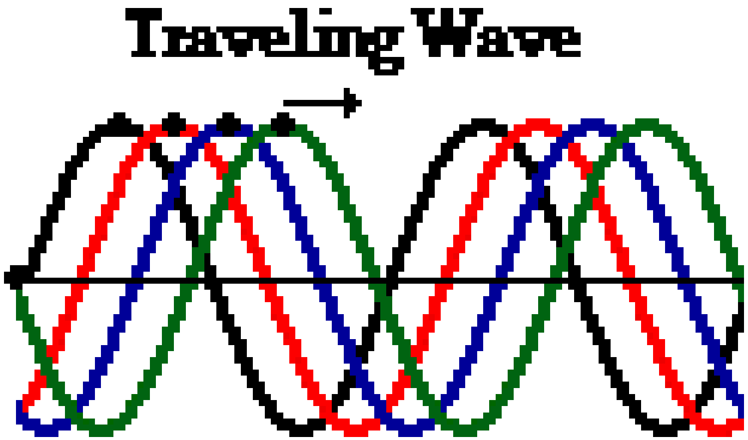
APÊNDICE 1

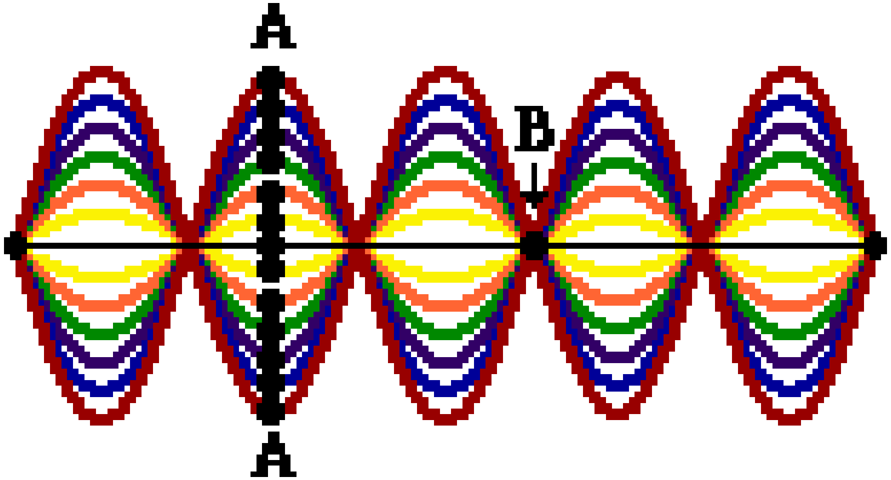
INTERFERÊNCIA



http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=3&filename=WavesSound_BasicWaveInterference.xml

COMPARE...





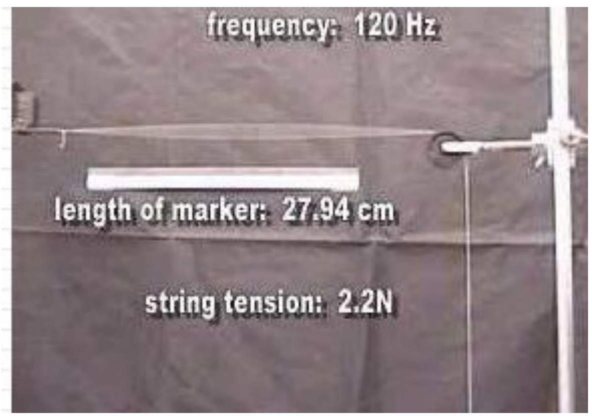
ONDAS ESTACIONÁRIAS

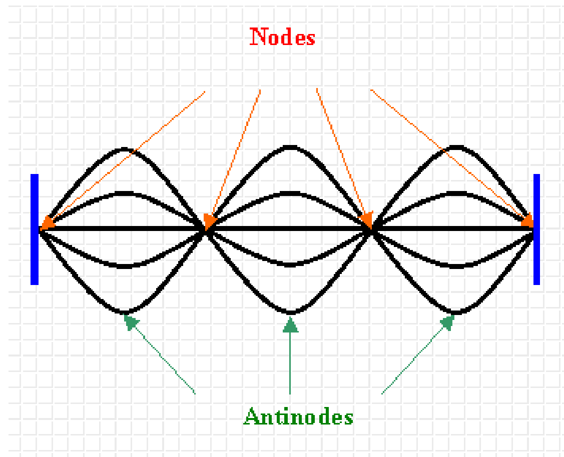
GERANDO ONDAS ESTACIONÁRIAS EXPERIMENTALMENTE

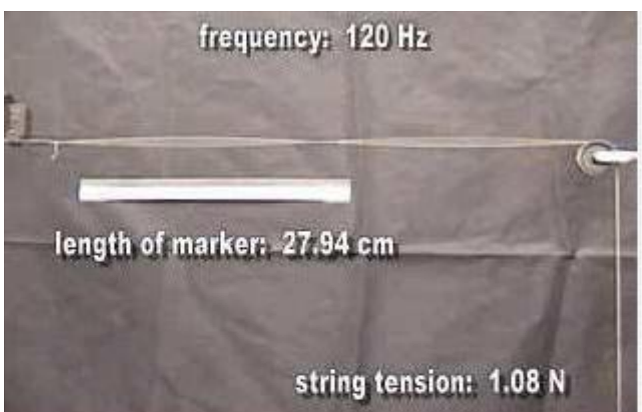
http://electron9.phys.utk.edu/phys135d/modules/m10/waves.htm

http://www2.biglobe.ne.jp/~norimari/science/JavaEd/e-wave4.html

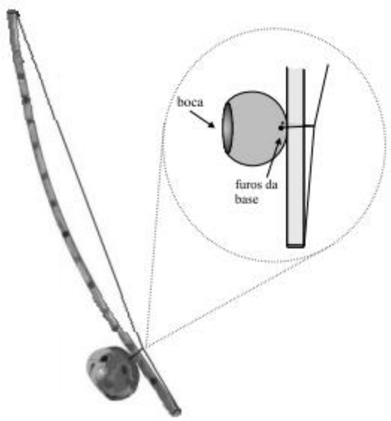
http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol8/Num2/v08n02a08.pdf







O BERIMBAU



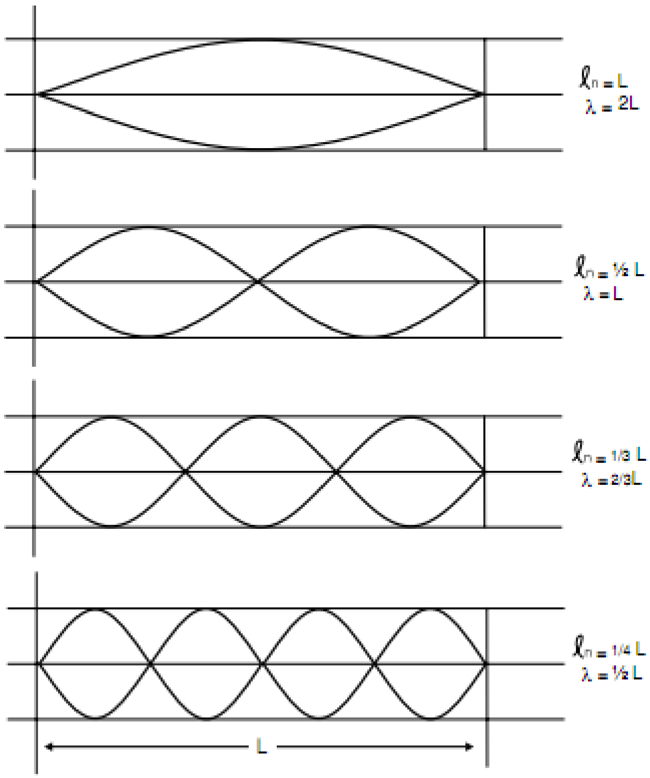
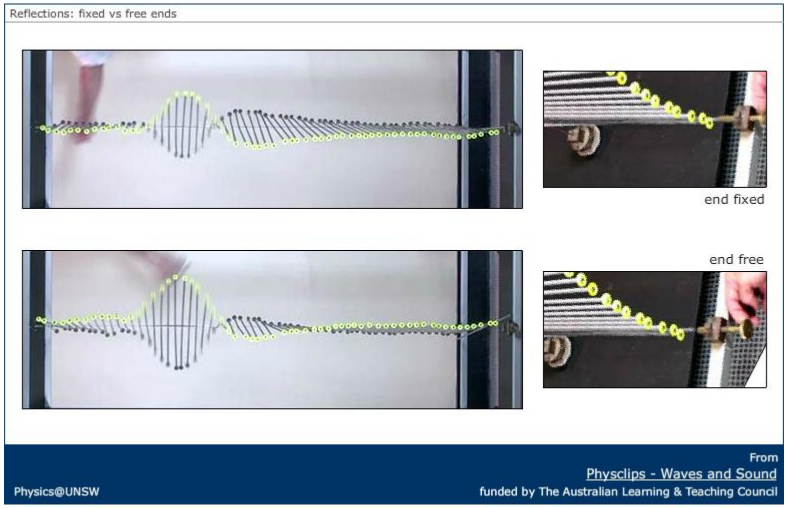
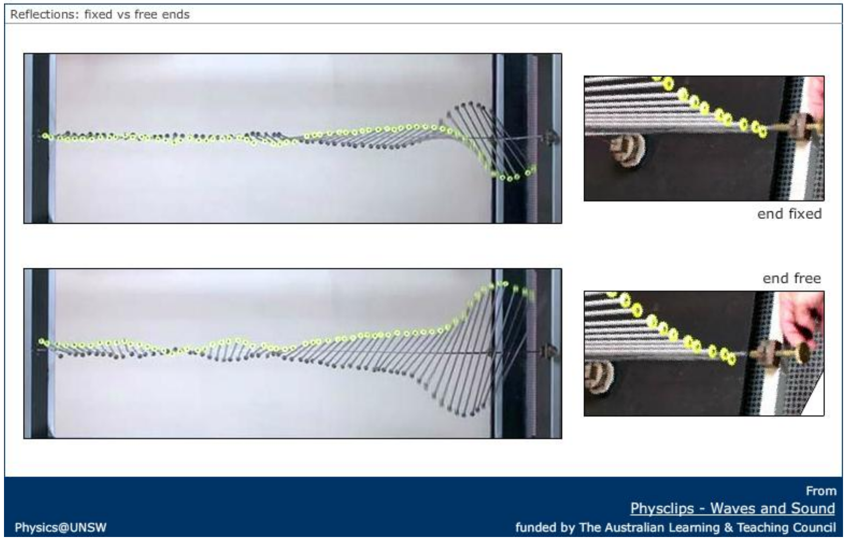


Figura 3 - Figura mostrando os quatro primeiros harmônicos de uma corda fixa nos extremos.

- http://www.scielo.br/pdf/rbef/v28n4/a04v28n4.pdf

REFLEXÃO DE ONDAS (EXTREMIDADE LIVRE X FIXA)





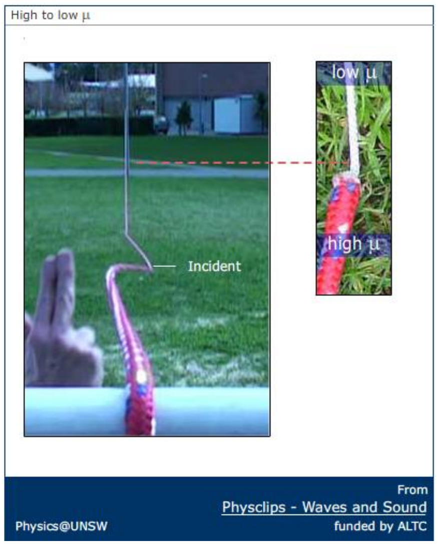
No aparatus com extremidade fixa ocorre a inversão do pulso

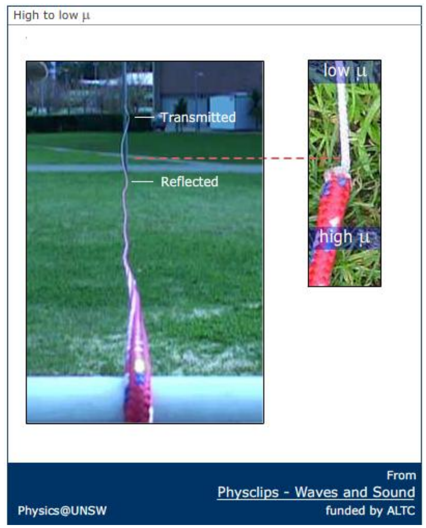
http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm

REFLEXÃO – ALTERAÇÃO DE DENSIDADE

$V=\sqrt{T/\mu}$

- MAIOR PARA MENOR DENSIDADE





http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm

A junção se comporta de maneira simular ao caso da corda com extremidade livre.

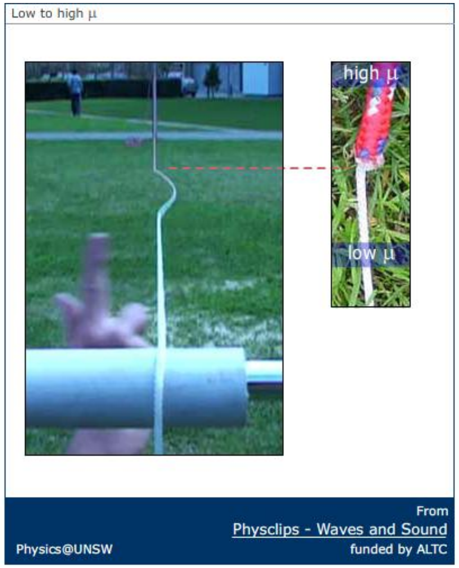
Quando o pulso incidente é o da corda com maior densidade, na reflexão ele não é invertido, ocorrendo também a transmissão (A(incidente) >A1 (refletido) e A (incidente) >A2 (transmitido).

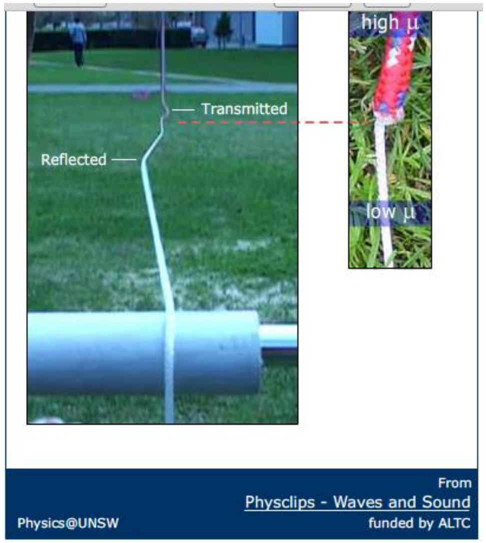
Como a velocidade é inversamente proporcional à densidade linear, a velocidade na corda mais densa é menor (V1<V2). A frequência será a mesma nas duas cordas, pois o gerador de pulsos é o mesmo.

REFLEXÃO – ALTERAÇÃO DE DENSIDADE

MENOR PARA MAIOR DENSIDADE

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm

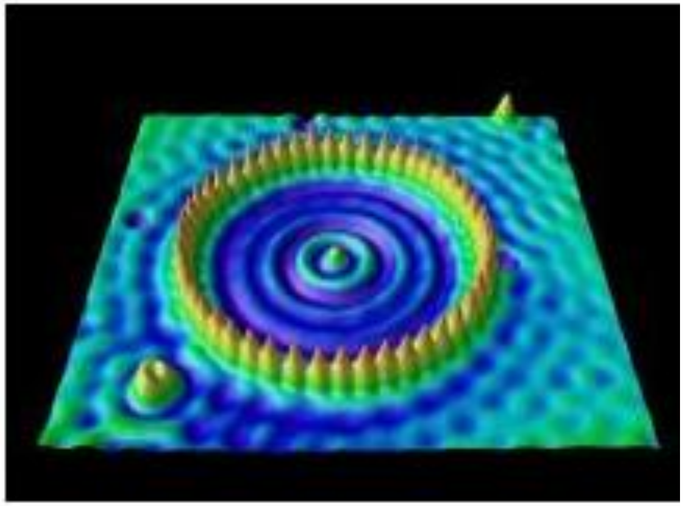




A junção se comporta de maneira simular ao caso da corda com extremidade fixa.

O pulso ao encontrar o limite entre as duas cordas é refletido de forma inversa. Contudo, parte da energia é transmitida para a corda de maior densidade. Tanto o pulso refletido, como o transmitido tem amplitude menor que o inicidente. A freqüência (f) desses dois pulsos é a mesma, pois a fonte é a mesma. A velocidade na corda menos densa é maior do na mais densa, V1> V2.

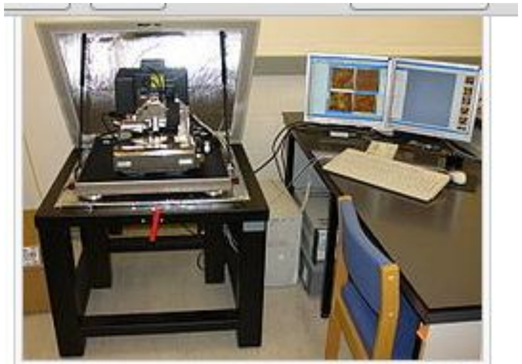
As Ondas Estacionárias da IBM



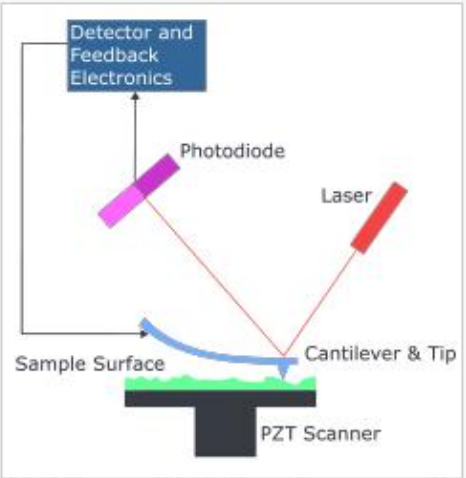
Pesquisadores da IBM – Arrastaram átomos de ferro na forma circular em uma superfície de cobre, fazendo com que a maioria dos elétrons da superfície fossem armadilhados, criando ondas estacionárias uniformes dentro do círculo.
http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/gallery.html

Sugestão: www.nanoscience.com/education/STM.html

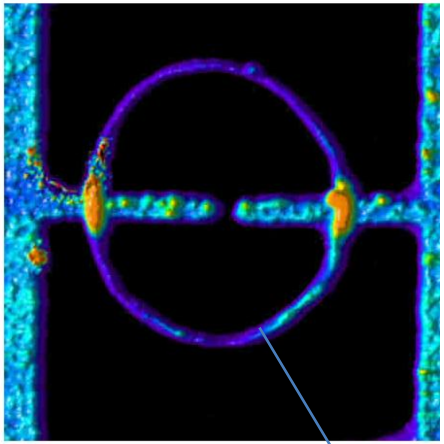
Microscópio de Força Atômica (Reflexão de ondas - IBM)



A commercial AFM setup



Block diagram of atomic force microscope



Os anéis posicionados em eletrodos metálicos permitem estudar fenômenos de transporte elétricos novos => desenvolver novas tecnologias de dispositivos (imagem obtida pela IBM)

Anel com 1 micron de diâmetro situado sobre eletrodos de ouro