

Gabarito - Ex. 4.6 - Lista I

4) b) Vamos encontrar o supremo de $[0, 2[= I$.
Afirmamos que $\sup [0, 2[= 2$. De fato, notemos o seguinte:

i) 2 é cota superior de I : Pois, pela definição de I , $\forall x \in I$ satisfaz: $0 \leq x < 2$. Logo, $\forall x \in I$, vale que $x \leq 2$.

ii) 2 é a menor cota superior de I , i.e., nenhum número menor que 2 pode ser cota superior de I .
Com efeito. Se $\epsilon < 0$, qualquer elemento de I é maior que ϵ ; em particular temos $\epsilon < \frac{1}{2} \in I$.

Se $0 < \epsilon < 2$, segue que $2 < 2 + \epsilon < 4$
o que implica em $1 < \frac{2 + \epsilon}{2} < 2$. Logo

$\frac{2 + \epsilon}{2} \in I$. Por outro lado, como $\epsilon < 2$, obtemos
 $2\epsilon < 2 + \epsilon$, ou, $\epsilon < \frac{2 + \epsilon}{2}$. Portanto, em nenhum caso ϵ é cota superior de I , ou seja, 2 é a menor cota superior. ■