Revisão de Álgebra

Tópicos (no quadro branco)

- Matrizes
- Operações com matrizes

Conceitos básicos

Recomenda-se usar letras minúsculas para representar vetores. Os elementos são referidos como x_i .

- Produto interno de vetores:

$$x^T y \in \mathbb{R} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Produto externo de vetores:

$$xy^T \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \dots & x_m y_n \end{bmatrix}$$

2

Conceitos básicos

Recomenda-se usar letras maiúsculas para representar matrizes. Os elementos são referidos como A_{ij} .

- Produto de Matrizes: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

p.ex.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

3

Matrizes especiais

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ diagonal} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \text{ Triangular superior}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \end{pmatrix} \text{ tri-diagonal} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ Triangular inferior}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ I (matriz identidade)}$$

4

Conceitos básicos

Transposição:

- troca de linhas com colunas
- OU
- “reflexão” do vetor/matriz em uma linha

$$\text{p.ex. } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T = (a \ b)$$

$$\bullet (A^T)^T = A$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\bullet (AB)^T = B^T A^T$$

$$\bullet (A+B)^T = A^T + B^T$$

5

Inversa de uma matriz

- A inversa de uma matriz quadrada A , denotada como A^{-1} , é a matriz tal que:

$$\bullet AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ (matriz identidade)}$$

- Se A^{-1} e B^{-1} existem, então

$$\bullet (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$\bullet (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- Para matrizes ortonormais: $A^{-1} = A^T$

- Para matrizes diagonais $D^{-1} = \text{diag}\{d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1}\}$

6

Solução de Sistemas Lineares

- O sistema de equações lineares mais simples tem duas equações e duas variáveis, por exemplo:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 &= 9\end{aligned}$$

- Este sistema pode ser representado da forma matricial $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

7

Independência linear

- Um conjunto de vetores é linearmente independente se nenhum dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros
- Vetores $v_1, \dots, v_k$ são L.I. se $c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$, o que implica: $c_1 = \dots = c_k = 0$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

p.ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(u,v)=(0,0)$, i.e. as colunas são linearmente independentes.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = -2x_1 + x_2$$

8

Determinante

The general form for a 2-equation system with 2 variables is $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

If we multiply the top equation by a_{22} and the bottom equation by a_{12} :

$$\begin{aligned}a_{22}a_{11}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= a_{12}b_2\end{aligned}$$

and subtract the bottom equation from the top

$$\begin{aligned}(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 &= a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ x_1 &= \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\end{aligned}$$

There can only be a solution if the denominator here is $\neq 0$. The denominator $(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})$ is the *determinant* of the matrix A and we can compute it using the det function.

9

Independência Linear

- Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- O determinante desta matriz é zero.

We say that vectors $v_1, v_2, \dots, v_n$ are *linearly dependent* when there exist nonzero constants $c_1, c_2, \dots, c_n$ such that

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

10

Independência linear e posto (rank)

- O posto (rank) de uma matriz é simplesmente o número de linhas que são linearmente dependentes, ou o número de linhas linearmente independentes.
- Pode ser mostrado que o posto em relação às linhas é igual ao posto em relação às colunas, i.e., o posto é também igual ao número de colunas linearmente independentes.

11

Sistema subdeterminado x superdeterminado

- A matriz A pode ter dimensão $m \times n$ com $m \neq n$.
- Se $m < n$ então existem mais variáveis do que equações. Neste caso, será impossível encontrar uma única solução exata. Este é um sistema subdeterminado.
- Se $m > n$ então existem mais equações do que variáveis. Pode ser impossível satisfazer todas as equações simultaneamente. Este é um sistema superdeterminado.

12