Mecânica quântica e relatividade

1. Mostre explicitamente que $\mathrm{sign}(p^0)$ é invariante ao aplicarmos uma transformação de Lorentz;

2. Considere a equação de onda para uma partícula de spin 0. Afirmamos nas aulas que, para evitar três ou mais derivadas respeito ao tempo e a correspondente instabilidade de Ostrogradsky, é necessário nós limitarmos a considerar $\phi(x)$ e $\phi^\mu(x)$. Mostre explicitamente que, considerando $\phi^{\mu\nu}(x)$, a equação de onda resultante possuiria mais de duas derivadas;

3. Considere a classificação das representações irredutíveis do grupo de Poincarè. Qual é a representação de dimensão menor que contém um gráviton (partícula de spin 2)?

4. Em unidades naturais, a equação de Dirac pode ser escrita como $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$. Escreva a mesma equação em unidades nas quais $c \neq 1 \neq \hbar$;

5. Na derivação da equação de Klein-Gordon, afirmamos que as duas constantes que aparecem nas equações

$$P^\mu\phi_\mu = m\phi, \qquad P^\mu\phi = m\phi^\mu,$$

   podem sempre ser tomadas como iguais. Mostre que isto é verdade (dica: pense nas possíveis redefinições das funções de ondas ϕ e ϕ^μ);

6. Considere os espinores ψ_L e ψ_R definidos nas aulas:
   (a) Calcule as transformações de Lorentz dos espinores conjugados $\psi_L^\dagger$ e $\psi_R^\dagger$;
   (b) É verdade que a combinação $\psi_L^\dagger\psi_R$ é invariante de Lorentz?
   (c) Mostre que $(\psi_R^\dagger\psi_R, \psi_R^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi_R)$ se transforma como um 4-vetor;
   (d) É verdade que $\psi_R^\dagger\partial_t\psi_R - \psi_R^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi_R$ é invariante de Lorentz?

7. Usando a expressão explícita para o campo quântico de radiação $\boldsymbol{A}_\perp$ em termos dos operadores de criação e destruição, mostre que

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\left(|\boldsymbol{E}_\perp|^2 + |\boldsymbol{B}_\perp|^2\right) = \sum_\lambda \int d^3k\left(E_k a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda,k} + \frac{1}{2}\delta^3(0)\right).$$

8. Considere a interação entre campo electromagnético e átomos, descritos pelos campos $\boldsymbol{A}_\perp$ e ψ. Calcule a seção de choque para o espalhamento $\gamma(\boldsymbol{k}_1) + C_n \to \gamma(\boldsymbol{k}_2) + C_m$, onde $C_{m,n}$ (com $m \neq n$) são os estados do átomo, de energias E_m e E_n.