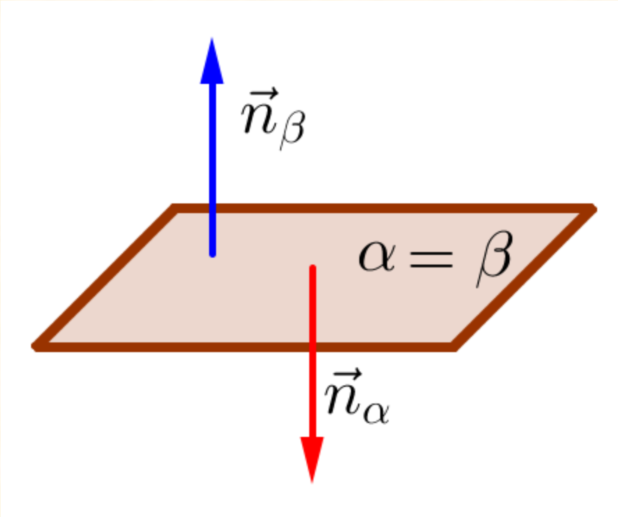
MAT0105 – Geometria Analítica

Posições relativas de Planos e retas no Espaço

Profa. Ana Paula Jahn

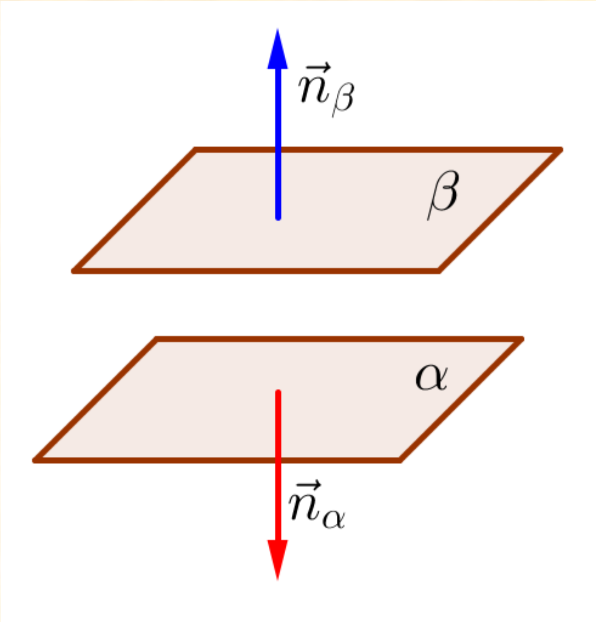
anajahn@ime.usp.br

Posições relativas de 2 planos

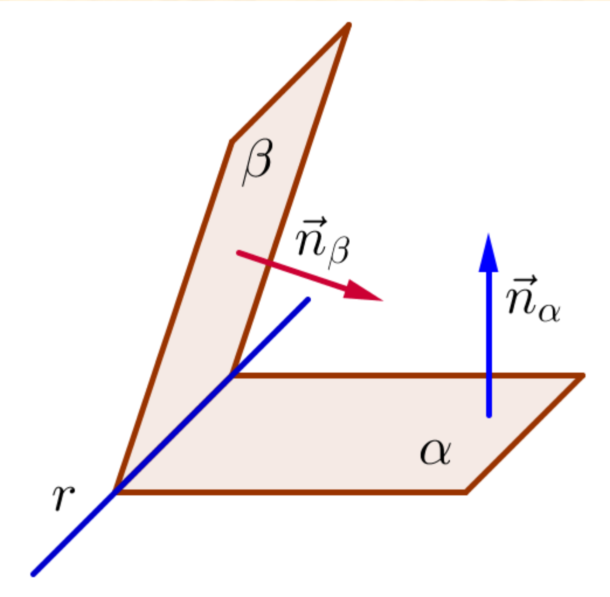


Coincidentes

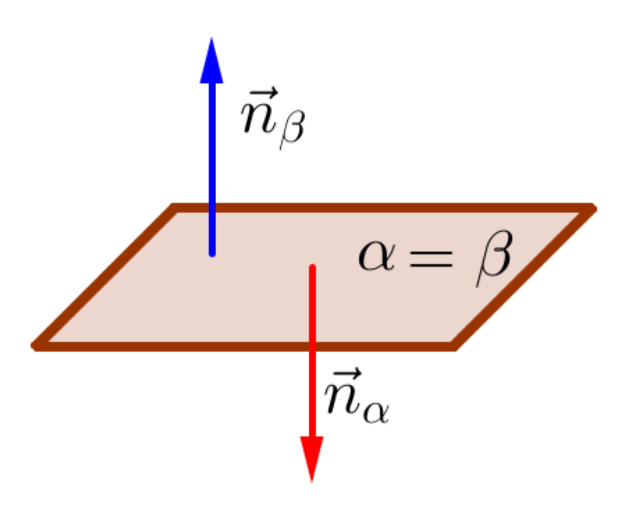
Paralelos



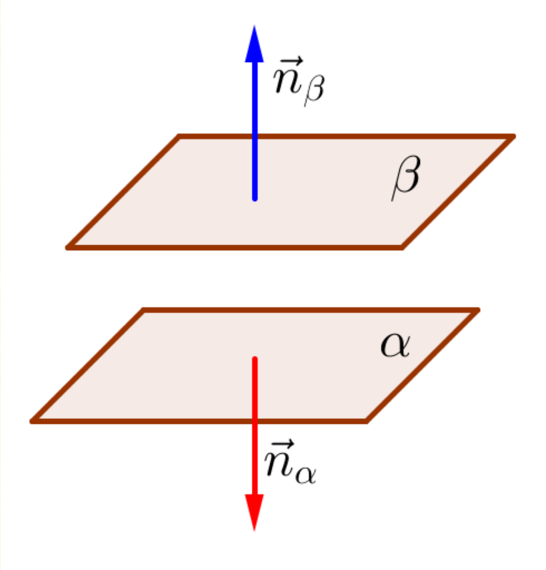
Secantes



Posições relativas de 2 planos



Coincidentes



Paralelos

Observe que quando os **vetores normais** dos planos α e β são paralelos, esses planos podem ser **coincidentes** ou **paralelos (distintos)**.

Para identificar se esses planos são paralelos ou coincidentes, basta **verificar se um ponto de um desses planos pertence ao outro**.

Em **caso afirmativo**, os planos são **coincidentes**, caso **contrário**, os planos são **paralelos**.

Exemplo 1

Em cada item a seguir, determine a posição relativa dos planos α e β.

a) $\alpha : 2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z} + 4 = 0$ $\qquad \beta : 4\mathbf{x} - 6\mathbf{y} + 2\mathbf{z} + 4 = 0$

Solução:

$\vec{n}_\alpha = (2,-3,1)$ $\qquad \vec{n}_\beta = (4,-6,2)$

Observe que os **vetores normais** dos planos α e β **são paralelos**.

Assim, esses planos podem ser paralelos ou coincidentes.

Considere um ponto do plano α, por exemplo**, A(0,0,-4)** e verifique se esse ponto pertence ao plano β.

Ou seja, substitua as coordenadas de A na equação do plano β.

$$4.0 - 6.0 + 2(-4) + 4 = 0 \qquad \Rightarrow -4 = 0 \quad \text{(F)}$$

Como essa substituição conduz a uma **falsidade**, pode-se concluir que o ponto **A não pertence ao plano β**.

Logo, os planos α **e β são paralelos**.

b) $\alpha : \mathbf{y} - 3\mathbf{z} + 4 = 0$ $\beta : -3\mathbf{y} + 9\mathbf{z} - 12 = 0$

Solução:

$\vec{n}_\alpha = (0,1,-3)$ $\vec{n}_\beta = (0,-3,9)$

Observe que os **vetores normais** dos planos α e β **são paralelos.**

Assim, esses planos podem ser paralelos ou coincidentes.

Considere um ponto do plano α, por exemplo, A(4,-1,1) e verifique se esse ponto pertence ao plano β.

Ou seja, substitua as coordenadas de A na equação do plano β

$$-3.(-1) + 9.1 - 12 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{(V)}$$

Como essa substituição conduz a uma **verdade**, pode-se concluir que o ponto *A* pertence ao plano β.

Logo, os **planos α e β são coincidentes**.

c) $\alpha: y - 3z + 4 = 0$

$$\beta: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + h\ ,\ t, h \in R \\ z = t + h \end{cases}$$

Solução: $\vec{n}_\alpha = (0,1,-3)$

$\vec{n}_\beta = (-2,0,1) \times (0,1,1) = (-1,2,-2)$

Observe que os vetores normais dos planos α e β não são paralelos.

Assim, esses **planos são secantes** e se interceptam segundo uma reta r.

Pode-se escrever uma equação geral do plano $\beta: -x + 2y - 2z + d = 0$

Lembre-se de que para obter o valor do parâmetro ***d*** basta substituir na equação acima as coordenadas de um ponto de β. Por exemplo, **P(2,-1,0).**

$-2 + 2(-1) - 2.0 + d = 0 \Rightarrow d = 4$ Assim, $\beta: -x + 2y - 2z + 4 = 0$

Observe que as coordenadas dos pontos da reta *r*, interseção dos planos α e β, satisfazem a equação geral do plano α e do plano β. Ou seja,

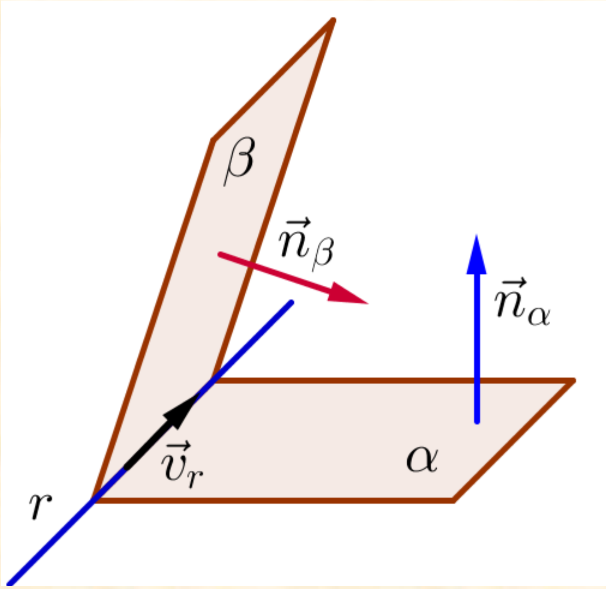
$$\begin{cases} y - 3z + 4 = 0 \\ -x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é denominado ***equação geral da reta r***.

Definição 1

Considere a reta r interseção dos planos α e β de equações:

$$\alpha : \mathbf{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1} = 0 \qquad \beta : \mathbf{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2} = 0$$



O sistema constituído pelas equações gerais dos planos α e β é chamado ***equação geral da reta r***.

$$\mathbf{r} : \begin{cases} \mathbf{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1} = 0 \\ \mathbf{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2} = 0 \end{cases}$$

Note que o vetor direção da reta r possui representante nos planos α e β.

Assim, $\vec{v}_r$ é um vetor ortogonal a $\vec{n}_\alpha$ e a $\vec{n}_\beta$.

Daí, o produto vetorial $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ fornece um vetor diretor da reta r, ou seja,

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

Exemplo 2

Determine uma **equação vetorial da reta *r*** dada a seguir.

$$\mathbf{r}:\begin{cases}\mathbf{y}-3\mathbf{z}+4=0\\ -\mathbf{x}+2\mathbf{y}-2\mathbf{z}+4=0\end{cases}$$

Solução:

Pode-se determinar 2 pontos da reta *r* atribuindo um valor a uma das variáveis x, y, ou z e resolvendo o sistema obtido. Por exemplo, considere **z = 0** então,

$$\begin{cases}\mathbf{y}-3.0+4=0\\ -\mathbf{x}+2\mathbf{y}-2.0+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{y}+4=0 \Rightarrow y=-4\\ -\mathbf{x}+2\mathbf{y}+4=0\end{cases}$$

$$-\mathbf{x}-8+4=0 \Rightarrow x=-4$$

Assim, o ponto A=(-4, -4, 0) é um ponto da reta r. Analogamente, B=(4,2,2) é ponto de r. $\overrightarrow{AB}=B-A=(8,6,2)$. Logo, $\vec{v}=(4,3,1)$ é um vetor diretor de r.

Logo, uma equação vetorial da reta r é

$$\mathbf{r}:\mathbf{X}=(-4,-4,0)+\mathbf{t}(4,3,1)\,,\ \mathbf{t}\in\mathbf{R}$$

Exemplo 3

Determine uma equação geral da reta r dada a seguir.

$$\mathbf{r}:\mathbf{X}=(1,0,0)+\mathbf{t}(0,3,-1),\ \mathbf{t}\in\mathbf{R}$$

Solução:

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=3t \quad (com\ t\ real) \\ z=-t \end{cases}$$

Da equação (1), tem-se: $\mathrm{x}-1=0$

Das equações (2) e (3), tem-se:

$$\frac{y}{3}=-z \Leftrightarrow y=-3z \Leftrightarrow y+3z=0$$

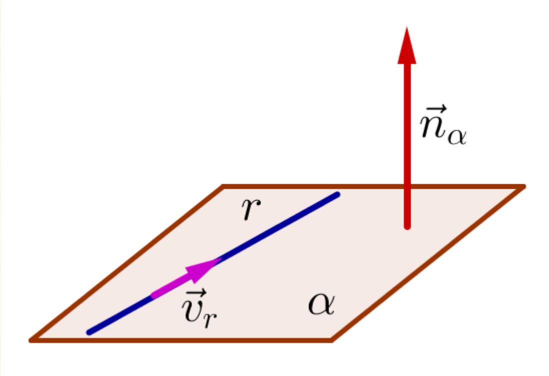
Logo, tem-se:

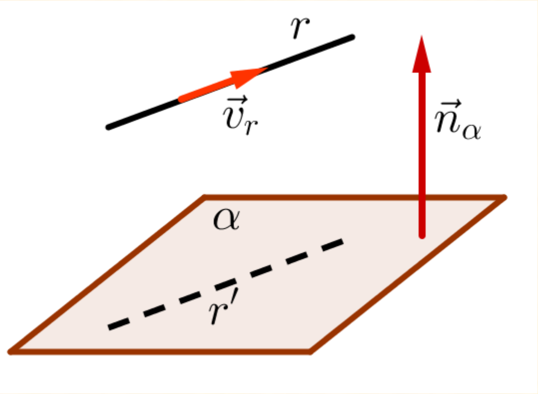
$r:\begin{cases} x-1=0 \\ y+3z=0 \end{cases}$ **equações gerais da reta** r (isto é, r como interseção de dois planos secantes)

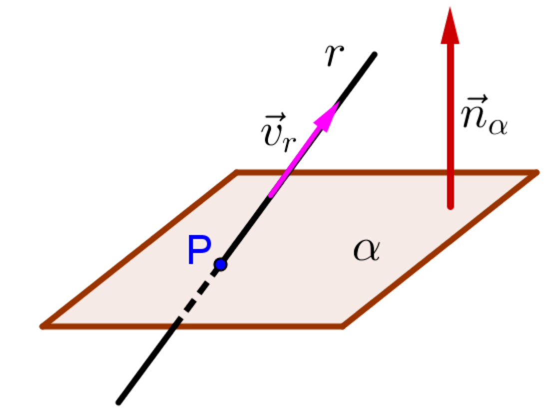
Posições relativas entre uma reta e um plano

São **<u>três</u>** as posições relativas entre uma reta r e um plano α.

- r $\subset \alpha$
- r // α
- r é secante a α







r **está contida** em α

$r \cap \alpha = r$

$(\forall\, P \in r, P \in \alpha)$

r **é paralela** a α

$r \cap \alpha = \emptyset$

$(\nexists\, P \in r\ :\ P \in \alpha)$

r **é secante** a α

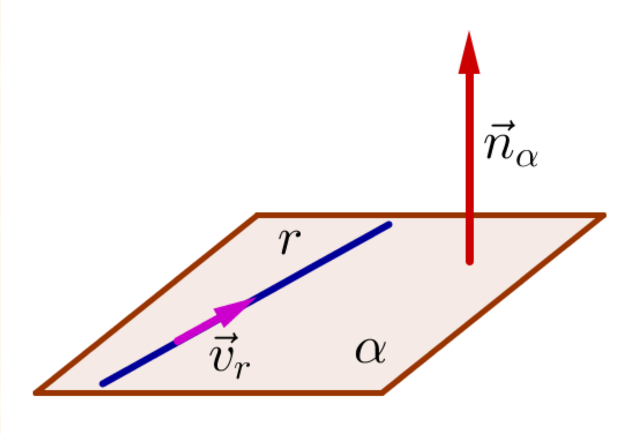
$r \cap \alpha = \{P\}$

$(\exists!\, P \in r\ :\ P \in \alpha)$

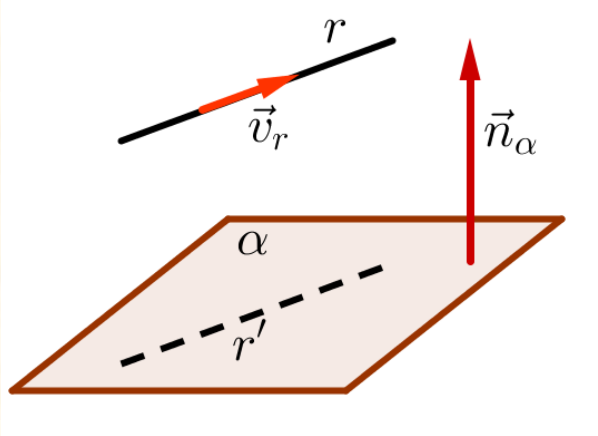
Obs. ∃! = existe e é único

Posições relativas entre uma reta e um plano

- r $\subset$ α



- r // α



Quando a reta ***r*** **está contida** no plano α ou, quando ***r*** **é paralela** ao plano α, o vetor diretor da reta *r* possui representante no plano α.

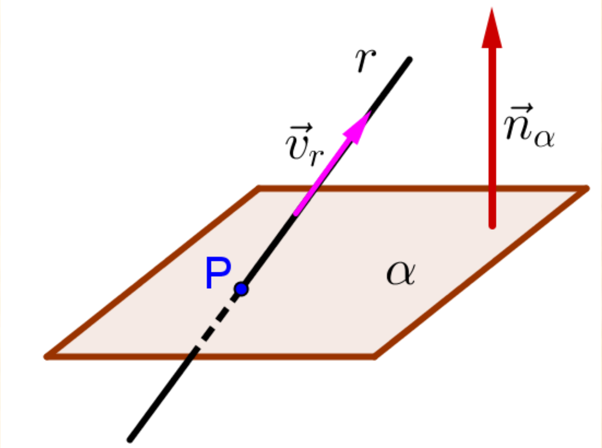
Daí, $\overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = 0$

Para identificar se a reta *r* é paralela ao plano α ou está contida em α **basta verificar se um ponto de *r* pertence ao plano** α.

Em caso **afirmativo**, a reta ***r*** **está contida no plano** α, caso **contrário**, a reta ***r* é paralela ao plano** α.

Posições relativas entre uma reta e um plano

- r é secante a α



r **é secante** a α

$r \cap \alpha = \{P\}$

Se $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle \neq 0$ então a reta ***r*** **é secante** ao plano α.

Caso particular: se $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{n_\alpha}$ então *r* é perpendicular ao plano ao plano α.

(*r* é secante e forma ângulo reto com qualquer vetor com representante em α)

Exemplo 4

Em cada item a seguir, determine a interseção da reta r com o plano α.

a)
$$r : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t, \; t \in R \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \alpha : y - 3z + 4 = 0$$

Pode-se iniciar verificando a posição relativa da reta *r* com o plano α.

$\overrightarrow{v_r} = (-2,3,1)$ e $\overrightarrow{n_\alpha} = (0,1,-3)$

Assim, $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = (-2).0 + 3.1 + 1.(-3) = 0$

Daí, ou r está contida em α, ou r é paralela ao plano α.

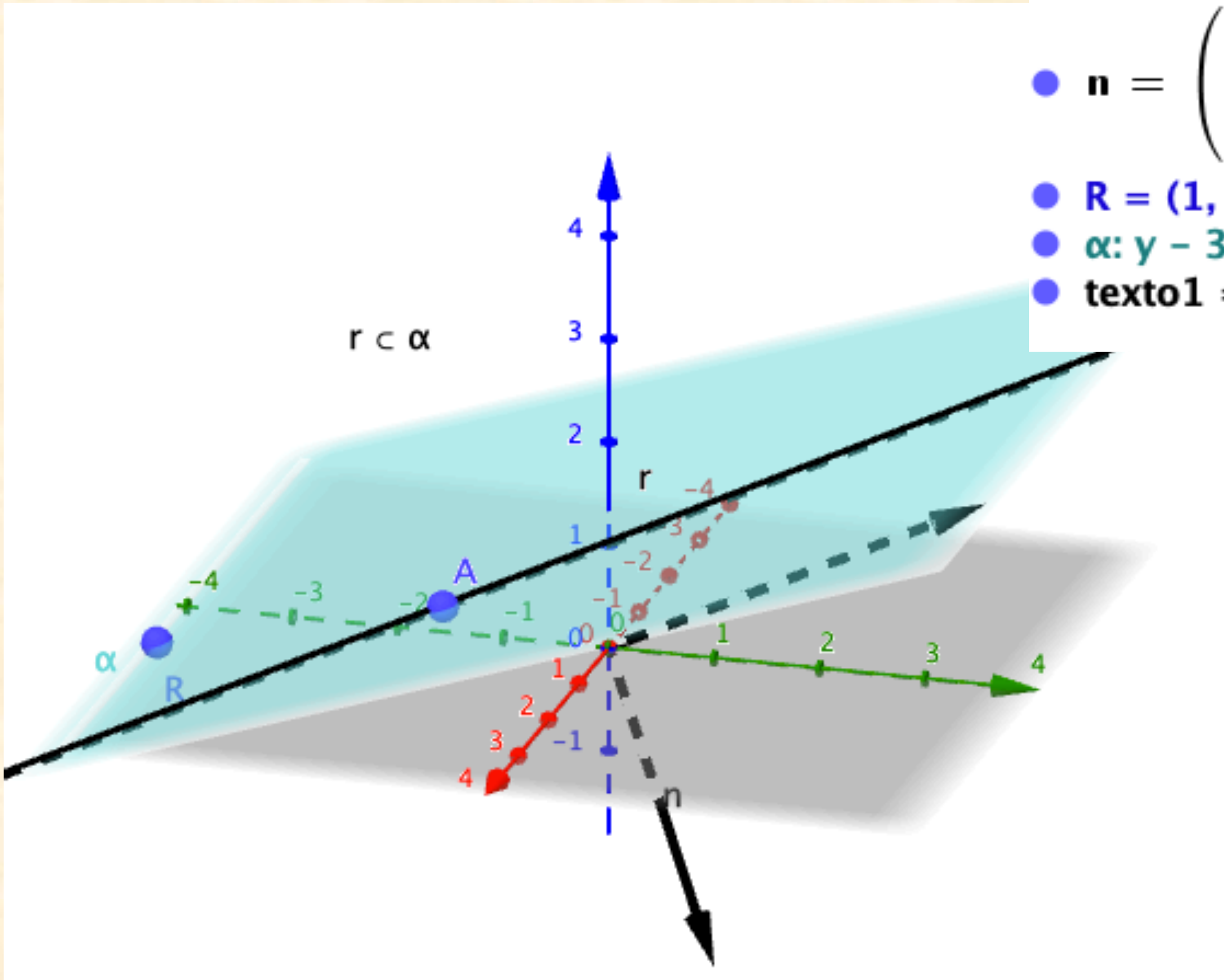
Considera-se então um ponto da reta *r*, por exemplo, $A = (2,-1,1)$ e deve-se verificar se esse ponto pertence ao plano α.

$$-1 - 3.1 + 4 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \;\; (V)$$

Logo, $A \in \alpha$ e, portanto, a reta **r está contida no plano α.**

a)

- $A = (2, -1, 1)$
- $v1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $r: X = (2, -1, 1) + \lambda\,(-2, 3, 1)$
- $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $R = (1, -4, 0)$
- $\alpha: y - 3z = -4$
- texto1 = "$r \subset \alpha$"



b) $r: \frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = z \qquad \alpha: y - 3z + 4 = 0$

Solução:

Pode-se iniciar verificando a posição relativa da reta *r* com o plano α.

$\overrightarrow{v_r} = (-2,3,1)$ e $\overrightarrow{n_\alpha} = (0,1,-3)$

Assim, $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = (-2).0 + 3.1 + 1.(-3) = 0$

Daí, ou *r* está contida em α, ou *r* é paralela ao plano α.

Considera-se então um ponto da reta *r*, por exemplo, $B = (0,0,0)$ e deve-se verificar se esse ponto pertence ao plano α.

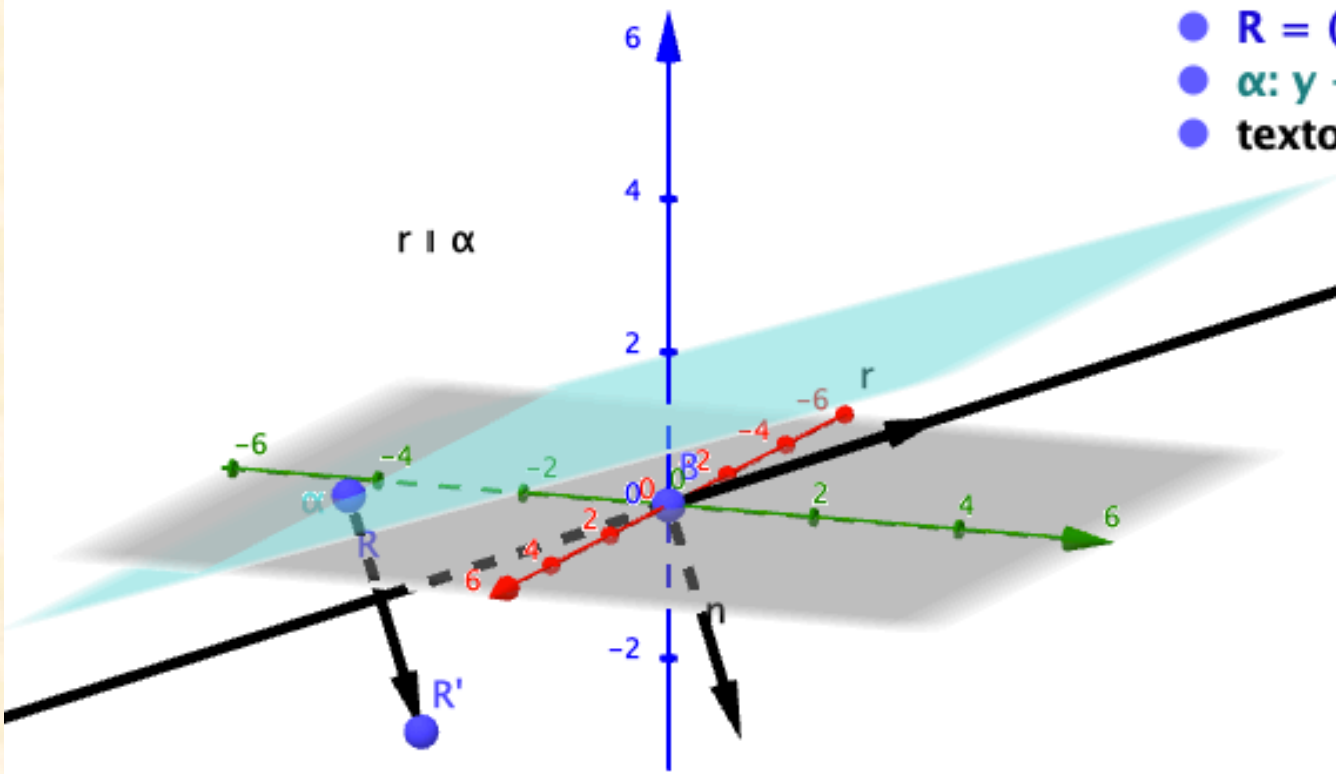
$$0 - 3.(0) + 4 = 4 \neq 0$$

Logo, $\mathrm{B} \notin \alpha$ e, portanto, a reta **r é paralela ao plano α**

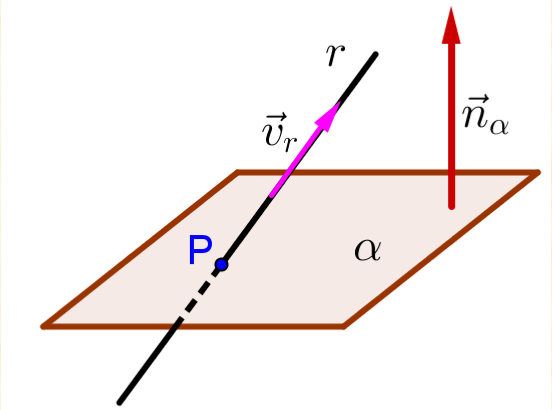
$r \cap \alpha = \phi$

b)

- $B = (0, 0, 0)$
- $v1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $r: X = (0, 0, 0) + \lambda\,(-2, 3, 1)$
- $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $R = (1, -4, 0)$
- $\alpha: y - 3z = -4$
- texto1 = "r // α"



c) $r:\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t\ ,\ t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$ $\qquad \alpha : x + y + z - 4 = 0$



Solução:
Verificando a posição relativa da reta r com o plano α:

$\vec{v}_r = (-2,3,1) \qquad \vec{n}_\alpha = (1,1,1)$

Assim, $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = -2.1 + 3.1 + 1.1 \neq 0$

Daí, a reta **r é secante ao plano** α.

Considere então P(x,y,z) o ponto de interseção da reta r com o plano α.

Como P pertence à reta r, pode-se escrever:

$P = (2 - 2t, -1 + 3t, 1 + t)$ para algum t real.

Por outro lado, *P também* pertence ao plano α, então as coordenadas de *P* satisfazem a equação desse plano, ou seja,

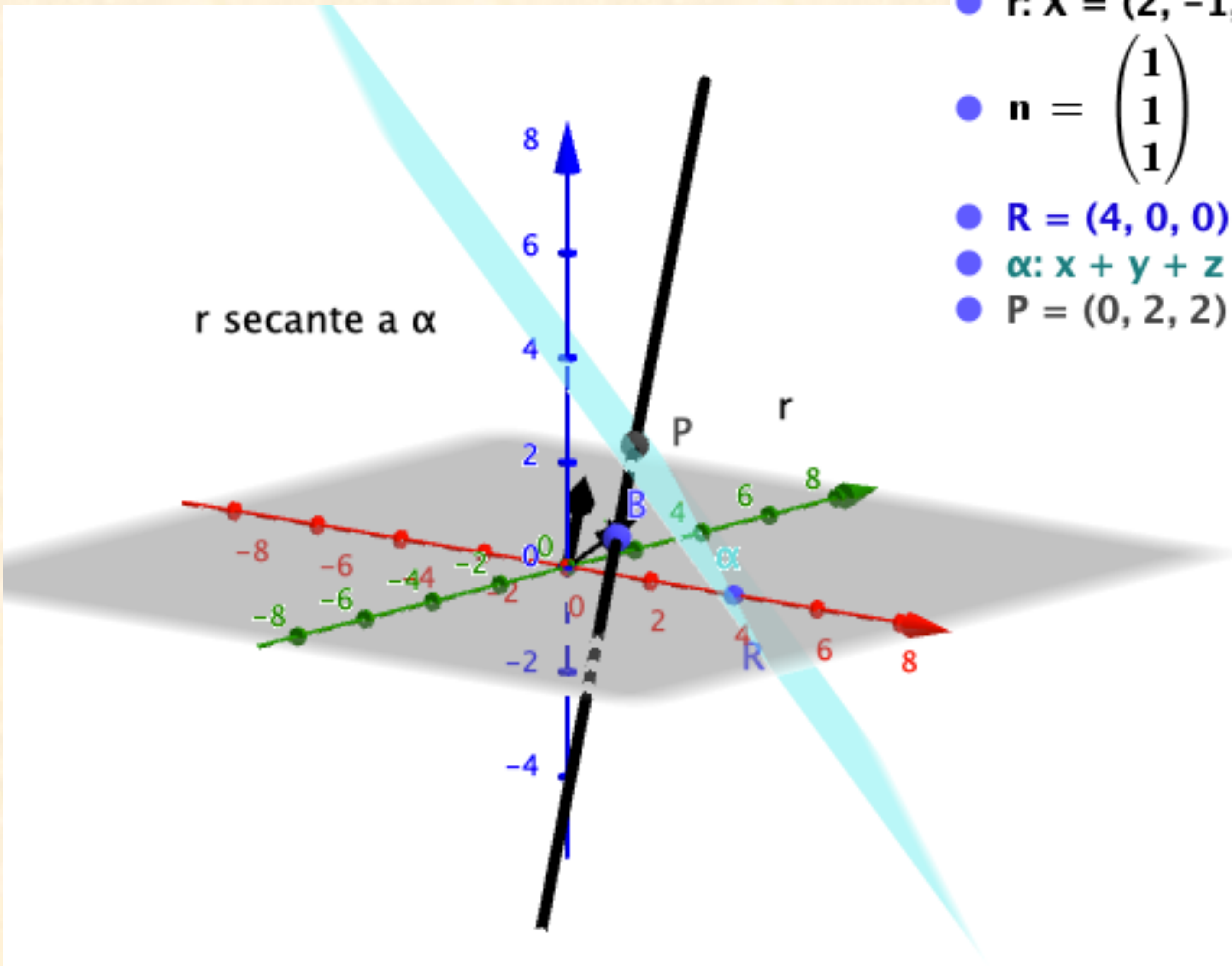
$$(2 - 2t) + (-1 + 3t) + (1 + t) - 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \therefore t = 1$$

Assim, $P = (0,2,2) \qquad r \cap \alpha = \{(0,2,2)\}$

Logo,

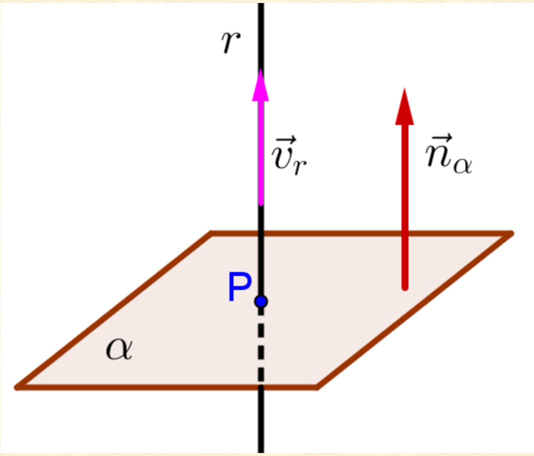
c)

- $B = (2, -1, 1)$
- $v1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $r: X = (2, -1, 1) + \lambda\,(-2, 3, 1)$
- $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $R = (4, 0, 0)$
- $\alpha: x + y + z = 4$
- $P = (0, 2, 2)$



d) r : $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = z$ $\qquad \alpha : -2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + \mathbf{z} - 14 = 0$

Solução:



Você deve começar verificando a posição relativa da reta r com o plano α.

$\vec{v}_r = (-2{,}3{,}1) \qquad \vec{n}_\alpha = (-2{,}3{,}1)$

Assim, $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = -2.(-2) + 3.3 + 1.1 \neq 0$

Daí, **a reta r é secante ao plano α.**

Observe que $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_\alpha}$ Logo, a reta **r é perpendicular** ao plano α.

Considere então *P(x,y,z)* o ponto de interseção da reta r com o plano α.

Como *P* pertence à reta r então você pode escrever:
$P = (-2z, 3z, z)$ para algum z $\in$ R.

Por outro lado, *P* também pertence ao plano α, então as coordenadas de *P* satisfazem a equação desse plano, ou seja,

$$-2(-2\mathbf{z}) + 3(3\mathbf{z}) + \mathbf{z} - 14 = 0 \Rightarrow 14\mathbf{z} - 14 = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = 1$$

Assim, $P = (-2{,}3{,}1)$ $\qquad r \cap \alpha = \{(-2{,}3{,}1)\}$

Logo,

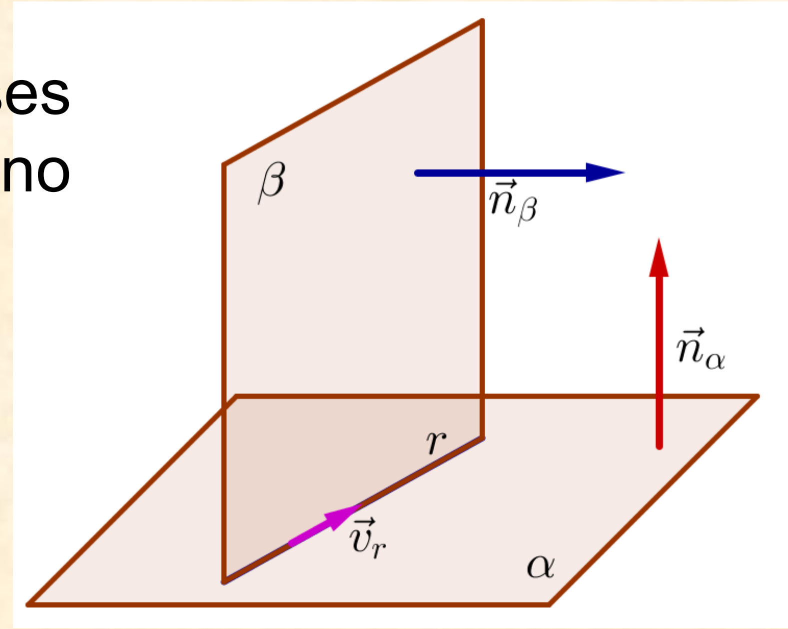
Definição 2

Se os planos α e β são tais que seus vetores normais são ortogonais, então os planos α e β são ditos ***perpendiculares***.

Observe que se os planos α e β são perpendiculares então:

- $\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{n_\beta}, \overrightarrow{n_\alpha} \rangle = 0$

- O vetor normal de um desses planos possui representante no outro.



Exemplo 5

Considere a reta *s* e o plano α, dados a seguir. Determine uma equação do plano β perpendicular ao plano α e que contém a reta *s*.

$$s: X = t(1,0,-1),\ t \in R \qquad \alpha: 3\mathbf{x} + \mathbf{y} - 3 = 0$$

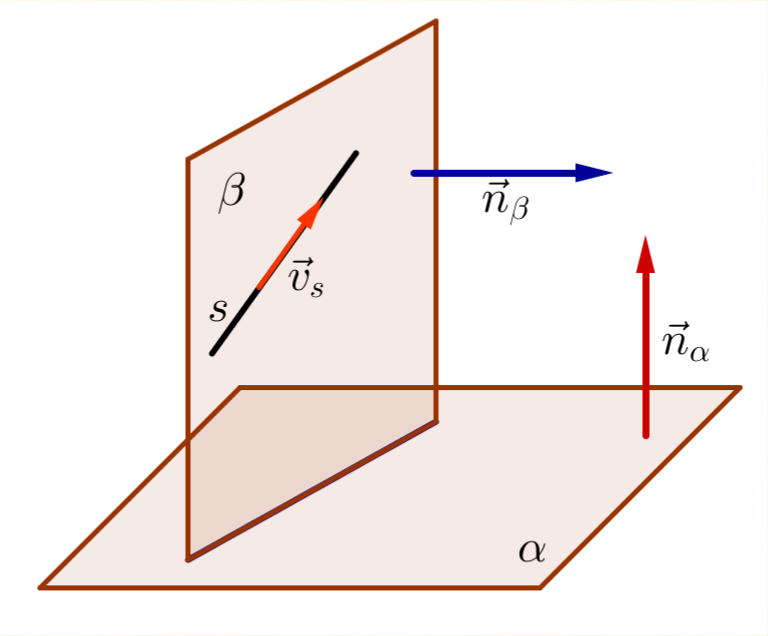
Solução:

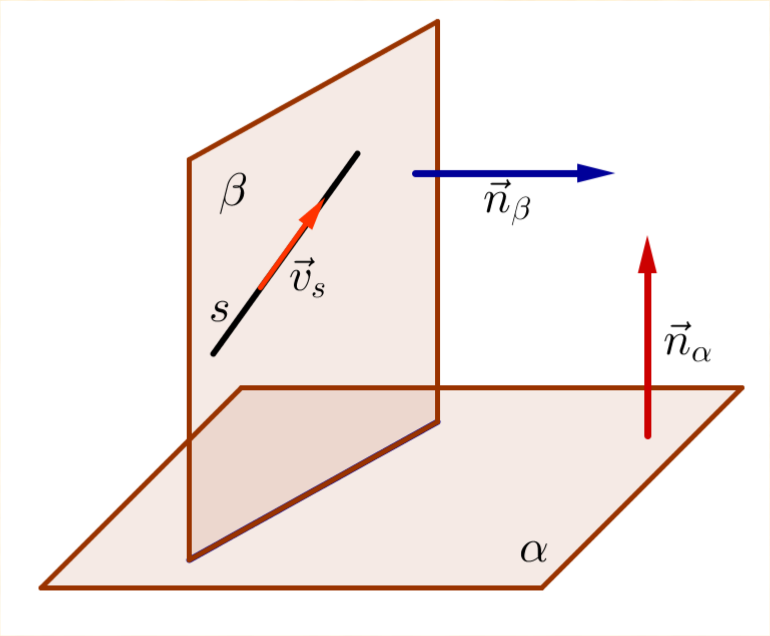
Inicia-se verificando a posição relativa da reta *s* com o plano α.

$$\vec{v}_s = (1,0,-1) \qquad \vec{n}_\alpha = (3,1,0)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_\alpha = 1.3 + 0.1 + (-1).0 \neq 0$$

Daí, a reta ***s* é secante ao plano α.**





$$\vec{n}_\alpha = (3,1,0)$$

$$\vec{v}_s = (1,0,-1)$$

Observe que os vetores $\vec{v}_s$ e $\vec{n}_\alpha$ possuem representantes no plano β e são LI

Além disso, a reta *s* passa pela origem e como *s* está contida no plano β, pode-se concluir que a origem pertence também ao plano β.

Logo, $\beta : \mathbf{X} = \mathbf{t}(1,0,-1) + \mathbf{h}(\mathbf{3,1,0}), \mathbf{t,h} \in \mathbf{R}$