Exercícios: 1) Achar, caso existam, os valores de máximo e mínimo de

$$f(x) = |x^4 - 2x^3|, \quad x \in [0,3]$$

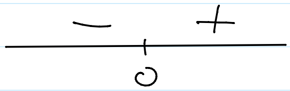
Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em $[0,3]$, pois f é uma função contínua e é composta de funções contínuas

$|u| = u$ se $u \geq 0$ e $|u| = -u$ se $u < 0$

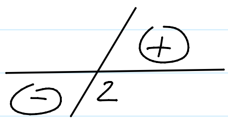
$$|x^4 - 2x^3| = x^4 - 2x^3 \text{ se } x^4 - 2x^3 \geq 0$$

$$|x^4 - 2x^3| = -(x^4 - 2x^3) \text{ se } x^4 - 2x^3 < 0$$

$x^4 - 2x^3 = x^3(x-2)$, $y = x^3$ que tem o mesmo sinal que x



$y = x - 2$



	0		2
x^3	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x^4 - 2x^3$	$+$	$-$	$+$

$$|x^4 - 2x^3| = x^4 - 2x^3 \iff x^4 - 2x^3 \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2$$

$$|x^4 - 2x^3| = -(x^4 - 2x^3) \iff x^4 - 2x^3 < 0 \iff 0 < x < 2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^3 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ -(x^4 - 2x^3) & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Vamos dividir em 2 casos

1) $f(x) = x^4 - 2x^3$ se $x \in [2,3]$ $\qquad f(0) = 0$ e $f(2) = 0$

2) $f(x) = -x^4 + 2x^3$ se $x \in [0,2]$

1) $f(x) = x^4 - 2x^3$, $x \in [2,3]$

Se x_0 é ponto de máximo (mínimo) de f em $[2,3]$ e

Se x_0 é ponto de máximo (mínimo) de f em $[2,3]$ e $x_0 \in]2,3[$, então x_0 é ponto crítico de f $(f'(x_0)=0)$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin]2,3[$$

$$\text{ou } x = \frac{3}{2} \notin]2,3[$$

$$f(2) = 0 \text{ e } f(3) = 3^4 - 2.3^3 = 81 - 54 = 27$$

$$\boxed{f(2) = 0 \text{ e } f(3) = 27}$$

2) $f(x) = -x^4 + 2x^3$, $x \in [0,2]$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-2x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin]0,2[$$

$$\text{ou } x = \frac{3}{2} \in]0,2[$$

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(-\frac{3}{2} + 2\right)$$

$$= \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} \cong 1,7$$

$$\boxed{f(0) = 0,\ f\left(\tfrac{3}{2}\right) \cong 1,7,\ f(2) = 0}$$

$f(0) = 0$ mínimo

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1,7$

$f(2) = 0$

$f(3) = 27$ máximo

2) a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0,+\infty[$ caso exista.

b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todo $\boxed{x \in]0,+\infty[}$

Não posso aplicar, neste exercício, o Teorema de Weierstrass, pois o intervalo não é do tipo $[a,b]$.

Só para lembrar: Supor que

1) f é derivável no intervalo aberto I;

2) f só tem um único ponto crítico em I, que indicaremos por $x_0 \in I$.

que indicaremos por $x_0 \in I$.

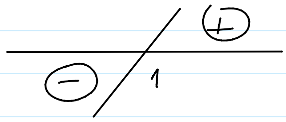
Se x_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f em I, então x_0 é ponto de máximo (mínimo) de f em I. (global)

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x . x - e^x . 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \in]0,+\infty[\Rightarrow$$ f tem um único ponto crítico em $]0,+\infty[$

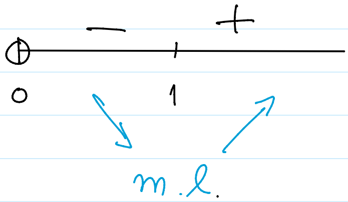
$y = e^x > 0 \quad \forall x$

$y = x - 1$



$y = x^2 > 0, \ \forall x \neq 0$

$f'(x)$:



$\therefore$ 1 é mínimo de f em $]0,+\infty[$

Temos que $f(1) \leq f(x), \ \forall x \in]0,+\infty[$, $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$

$$\therefore \quad \boxed{e \leq \frac{e^x}{x}, \quad \forall x \in]0,+\infty[}$$

b) ① $e \leq \frac{e^a}{a}, \quad \forall a \in]0,+\infty[\quad (x = a)$

② $e \leq \frac{e^b}{b}, \quad \forall b \in]0,+\infty[\quad (x = b)$

multiplicando ① e ②

$$e^2 \leq \frac{e^a}{a} . \frac{e^b}{b} = \frac{e^{a+b}}{ab}$$

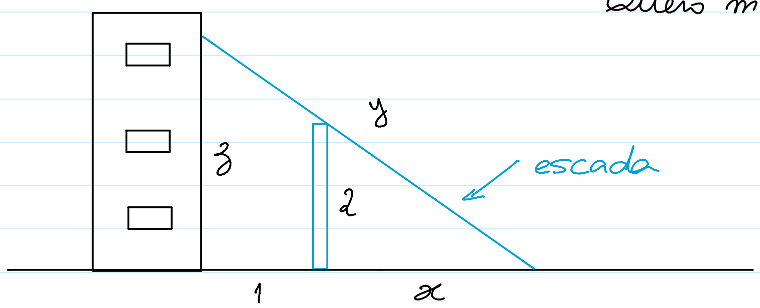
$$\Rightarrow \quad e^2 \geq \frac{e^{a+b}}{ab}, \quad \forall a,b \in]0,+\infty[$$

3) Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o

3) Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede e outra no chão do lado de fora do muro?

Quero minimizar y

$x>0,\ y>0$ e $z>0$



Por semelhança de triângulos temos: $\dfrac{z}{1+x} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow z = \dfrac{2(x+1)}{x}$

Teorema de Pitágoras: $z^2 + (1+x)^2 = y^2$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4(x+1)^2}{x^2} + (1+x)^2 = (1+x)^2\left[\frac{4}{x^2}+1\right] = \frac{(1+x)^2(4+x^2)}{x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{(1+x)^2(4+x^2)}{x^2} \Rightarrow y = \frac{(1+x)\sqrt{4+x^2}}{x}$$

Temos que estudar o mínimo de

$\sqrt{u^2} = |u|$

$$y = \frac{(1+x)\sqrt{4+x^2}}{x} \text{ em }]0,+\infty[$$

OBS: $y = \pm\sqrt{\dfrac{(1+x)^2(4+x^2)}{x^2}} = \pm\dfrac{\sqrt{(1+x)^2}\,\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x^2}} = \pm\dfrac{|1+x|\,\sqrt{4+x^2}}{|x|}$

Como $y>0$ e $x>0$, então $y = \dfrac{(1+x)\sqrt{4+x^2}}{x}$

$$y' = \frac{\left((1+x).\sqrt{4+x^2}\right)'.x - (1+x)\sqrt{4+x^2}.x'}{x^2}$$

$$= \frac{\left[(1+x)'\sqrt{4+x^2} + (1+x)\left(\sqrt{4+x^2}\right)'\right]x - (1+x)\sqrt{4+x^2}.1}{x^2}$$

$$= \frac{\left[1.\sqrt{4+x^2} + (1+x)\dfrac{1}{2\sqrt{4+x^2}}.(4+x^2)'\right].x - (1+x)\sqrt{4+x^2}}{x^2}$$

Regra da cadeia

$y = f(g(x))$

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y = \frac{\left(\sqrt{4+x^2} + \frac{\cancel{2}x(1+x)}{\cancel{2}\sqrt{4+x^2}}\right)x - (1+x)\sqrt{4+x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{(4+x^2 + x(1+x)).x - (1+x)(4+x^2)}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \frac{(4+x^2+x+x^2)x - (4+x^2+4x+x^3)}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \frac{\cancel{4x} + \cancel{2}x^3 + \cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - \cancel{x^3}}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \frac{x^3-4}{x^2\sqrt{4+x^2}} \Longrightarrow y' = \frac{x^3-4}{\underbrace{x^2\sqrt{4+x^2}}_{>0}}$$

$x^2 > 0,\ \forall x \neq 0$ e $\sqrt{4+x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

o sinal de y' é o mesmo que x^3-4 que é o mesmo que

$x - \sqrt[3]{4}$

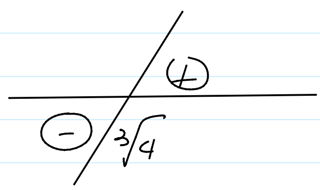
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$x^3 - 4 = x^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = (x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}x + (\sqrt[3]{4})^2)$

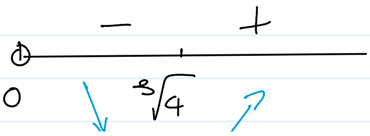
$\Delta = (\sqrt[3]{4})^2 - 4(\sqrt[3]{4})^2 < 0$

$x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$x - \sqrt[3]{4}$



y':



y : 0 ↘ $\sqrt[3]{4}$ ↗

m.l.

$y(x)$ só tem um único ponto crítico em $]0,+\infty[$ que é mínimo local, logo este ponto, que é $\sqrt[3]{4}$, é mínimo de $y(x)$ em $]0,+\infty[$.

Logo o comprimento mínimo da escada é

$$y(\sqrt[3]{4})$$

$$y(\sqrt[3]{4}) = \frac{(1+\sqrt[3]{4})\sqrt{4+\sqrt[3]{16}}}{\sqrt[3]{4}} \text{ metros}$$

PRIMITIVAS

DEF.: Dizemos que F é uma primitiva de f se:

$$F' = f$$

Pergunta: Qual a relação entre F e G duas primitivas de f?

$$(F' = f \text{ e } G' = f)$$

PROPOSIÇÃO: Seja F contínua no intervalo I e derivável no interior de I. Se $F'(x) = 0$ para todo x no interior de I, então F é uma função constante em I, isto é, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = k, \quad \forall x \in I$$

Teorema do valor médio (T.V.M.)

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$

Então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Seja $x_0 \in I$, indiquemos por $k = F(x_0)$. Mostremos que

$$F(x) = k, \quad \forall x \in I$$

Dado $x \in I$, se $x = x_0$, então $F(x) = F(x_0) = k$

Suponhamos que $x < x_0$.

Como F é contínua em I e $[x, x_0] \subset I$, então F é contínua em $[x, x_0]$

Como F é derivável no interior de I e $]x, x_0[$ está no interior de I, então F é derivável em $]x, x_0[$

Pelo T.V.M. existe $c \in]x, x_0[$ tal que

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = F'(c) = 0 \implies F(x) = F(x_0) = k$$
$$\implies F(x) = k$$

Analogamente se $x_0 < x$. $\blacksquare$

Corolário: Sejam F e G contínuas no intervalo I e deriváveis no interior de I. Se $F'(x) = G'(x)$, para todo x no interior de I, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = k$, $\forall x \in I$

(elas diferem por uma constante)

Podemos escrever: $F(x) = G(x) + k$, $\forall x \in I$

Dem: Seja $H(x) = F(x) - G(x)$, Então

$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, para todo x no interior de I

Pela Proposição existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $H(x) = k$, $\forall x \in I$

$$\therefore F(x) - G(x) = k, \quad \forall x \in I$$

Notação: Se F é uma primitiva de f $(F' = f)$ indicaremos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R} \text{ é uma constante}$$

Chamada de integral indefinida.

$$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + k}$$

Integrais imediatas:

1) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + k$, pois $(\operatorname{sen} x + k)' = \cos x$

2) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + k$, pois $(-\cos x)' = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$

3) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$, se $n \neq -1$, pois

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$$

4) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$, pois $(\ln x)' = \frac{1}{x}$