Nome: Wallace da Silva Ferreira nºUSP: 10298530

MAT0130 - Equações Diferenciais I

3ª Prova

1) a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

Solução: Pela equação característica temos:

$\det(A - \lambda . I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-\lambda).(3-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 4.1.4 = 9$

$\lambda = \frac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 4 \\ \searrow \lambda_2 = 1 \end{matrix}$ } autovalores

Para $\lambda = 4$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$

Para $y = 1$ $x = 1$ Logo um autovetor é $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$

Para $y = 1 \Rightarrow x = -2$ logo $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor

A solução geral será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{t} \quad C_1, C_2 \text{ constantes}$$

1 b

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$$

Solução: Pela equação característica temos:

$$\det(A - \lambda . I) = 0 \iff \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-6-\lambda).(4-\lambda) + 25 = 0 \Rightarrow -24 + 6\lambda - 4\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 24 + 25 = 0$$

1) b) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.(1) = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm 0}{2} \longrightarrow \lambda = -1$ único autovalor

Para $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -6+1 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = y$ Para $y = 1 \Rightarrow x = 1$

Logo um autovetor será $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para encontrar um segundo autovetor associado a $\lambda = -1$ deveremos procurar por uma solução do tipo:

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-t}$$ em que x, y é um autovetor.

$$\begin{pmatrix} -6+1 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -5x + 5y = 1 \\ -5x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$-5x + 5y = 1 \Rightarrow 5y = 1 - 5x$ para $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Logo um autovetor será $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1 b) A solução geral será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} e^{t}$$

C_1 e C_2 constantes

1 c)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases}$$

Solução: Pela equação característica, temos:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(4-\lambda).(6-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow 24 - 4\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 34 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4.1.(34) = -36$$

$$\lambda = \frac{10 \pm 6i}{2} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 5 + 3i \\ \lambda_2 = 5 - 3i \end{array} \right\} \text{autovalores}$$

1 c Dessa forma

Para $\lambda = 5+3i$, temos:

$$\begin{pmatrix} 4-(5+3i) & 5 \\ -2 & 6-(5+3i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-3i).x + 5y = 0 & (I) \\ -2x + (1-3i).y = 0 & (II) \end{cases}$$

multiplicando a primeira equação por $\frac{-1+3i}{10}$

$$\begin{cases} x + \frac{5.(-1+3i).}{10}y = 0 & (\times 2) \\ -2x + (1-3i).y = 0 \end{cases} \oplus \begin{cases} x + \frac{5.(-1+3i).}{10}y = 0 & (I) \\ 0 + 0y = 0 & (II) \end{cases}$$

$$x + \frac{(-1+3i).y}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{(1-3i).y}{2}$$

Para $y = 1$ $\quad x = \frac{1-3i}{2}$

Logo uma solução será:

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1-3i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} . e^{(5+3i).t} \quad \text{Como } e^{(5+3i).t} = e^{5t}.(\cos(3t) + i\,sen(3t))$$

1)

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1-3i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} . e^{5t} . (\cos(3t) + i . sen(3t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-3i}{2}\right) . \cos(3t) + \left(\frac{1-3i}{2}\right) . i\,sen(3t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(3t)}{2} - \frac{3i\cos(3t)}{2} + \frac{i\,sen(3t)}{2} + \frac{3 sen(3t)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(3t)}{2} + \frac{3 sen(3t)}{2} - \frac{3i\cos(3t)}{2} + \frac{i\,sen(3t)}{2}$$

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)}{2} + \frac{3 sen(3t)}{2} \\ \cos(3t) \end{bmatrix} . e^{5t} + i . \begin{bmatrix} \frac{-3.\cos(3t)}{2} + \frac{sen(3t)}{2} \\ sen(3t) \end{bmatrix} . e^{5t}$$

Os vetores $u(t) = e^{5t} . \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)}{2} + \frac{3 sen(3t)}{2} \\ \cos(3t) \end{bmatrix}$ e

$v(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3\cos(3t)}{2} + \frac{sen(3t)}{2} \\ sen(3t) \end{bmatrix} e^{5t}$ é um conjunto de soluções para o sistema dado que

$$W[u(t), v(t)] \neq 0.$$

① ⓒ Portanto a solução geral do sistema será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3t)}{2} \\ \cos(3t) \end{bmatrix} e^{2t} + K_2 \begin{bmatrix} \frac{-3\cos(3t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3t)}{2} \\ \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} e^{2t}$$

K_1 e K_2 constantes.

②

ⓐ Solução: Pela equação característica temos:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2}_{\text{autovalores}}$$

Para $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

1 c) Portanto a solução geral do sistema será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(3t)}{2} \\ \cos(3t) \end{bmatrix} e^{5t} + K_2 \begin{bmatrix} \frac{-3\cos(3t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(3t)}{2} \\ \mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} e^{5t}$$

K_1 e K_2 constantes.

2) a) Solução: Pela equação característica

2) a) $x = y$ para $y = 1 \Rightarrow x = 1$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda = 0$

Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

$x = -y$ para $y = 1 \Rightarrow x = -1$

$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ autovetor associado a $\lambda = 2$

(2)

(b) Solução: A solução constante será da forma $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montando o sistema temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -C_1 & (I) \\ -x + y = -C_2 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -C_1 & (I) \\ 0 + 0 = -C_2 - C_1 & (II) \end{cases}$$

$(\Rightarrow)\ C_1 = -C_2$.

Observamos, então que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pode ser solução constante se $C_1 = -C_2$ com

$$b = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $C_2 = 1$ temos $x - y = -1 \Rightarrow x = -1 + y$, para $y = 1$, temos $x = 0$, de forma que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como era esperado.

② ⓒ Solução:

$$\dot{X} = A.X + b$$

A solução do sistema homogêneo é:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} = C_1 . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cancel{e^{0}}\,1 + C_2 . \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} . e^{2t}$$

Para determinar a solução particular façamos:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = C_1(t) . \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + C_2(t) . \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

em que as funções $C_1(t)$ e $C_2(t)$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} dt$$

Sendo $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ soluções do sistema homogêneo.

Logo temos que:

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} 1 & -e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} dt$$

② A matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & -e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-e^{-2t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -\frac{e^{-2t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} dt =$$

$$C_1(t) = \int \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \cdot dt = -t + K$$ para $K = 0$

$$C_1(t) = -t$$

$$C_2(t) = \int \left(-\frac{e^{-2t}}{2} \cdot 3 - \frac{5 \cdot e^{-2t}}{2}\right) dt = -\int +4 \cdot e^{-2t} \cdot dt = 2 \cdot e^{-2t} + K_1$$

Para $K_1 = 0$ $\quad C_2(t) = 2e^{-2t}$.

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema será

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-2 \\ -t+2 \end{bmatrix}$$

③ ⓐ Solução:

Calculando-se os autovalores temos que:

$$\det(A-\lambda . I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$ $\quad \lambda = 0$ autovalor duplo

ou $\lambda = 3$

Para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x + y + z = 0$ para $x = -1, y = 1, z = 0$

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $x = -1$ $y = 0$ e $z = 1$ temos

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 & (\times \frac{1}{2}) \\ x - 2y + z = 0 & \oplus \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & (\times \frac{1}{2}) \\ -\frac{3y}{2} + \frac{3z}{2} = 0 & \oplus \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -\frac{3y}{2} + \frac{3z}{2} = 0 \\ +\frac{3y}{2} - \frac{3z}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = x \quad \text{Para } z = 1, y = 1, x = 1$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como temos a mesma quantidade de autovalores e autovetores, a matriz A é diagonalizável, obtendo-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

3) a)

$$S=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

temos que $D+N$ é

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{N}$$

e a matriz M é $\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

3) a)

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $D + N$ é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

e a matriz M é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) (b) Solução: Como $A = M.S.M^{-1}$, então

$e^A = M.e^S.M^{-1}$

$$e^S = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

(b) Dai,
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{pmatrix}$$