

SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO PLANO

1. UM EXEMPLO

Vamos considerar, inicialmente, o caso de sistemas 2×2 . ou seja, sistemas da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y \\ \dot{y} &= 2x + y\end{aligned}$$

ou, em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são -1 e 4 , com autovetores associados $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, respectivamente.

Vamos fazer uma mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, nas novas variáveis u e v , o sistema se torna “desacoplado”

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u \\ \dot{v} &= 4v, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$u(t) = C_1 e^{-t} \text{ e } v(t) = C_2 e^{4t}.$$

O par $(u(t), v(t)) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t})$, define uma curva no plano uv , cuja forma vamos investigar em seguida. No plano xy teríamos curvas com o mesmo aspecto qualitativo, que seriam a imagem das curvas no plano uv , pela transformação definida pela mudança de variáveis acima, ou seja

$$x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{4t}, \quad y(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}.$$

Vamos então considerar as diferentes possibilidades para sistemas lineares no plano. No que segue, suporemos sempre que a matriz

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é não singular, isto é, 0 não é autovalor de $\mathbf{A}$.

2. AUTOVALORES REAIS DISTINTOS

Suponhamos que a matriz $\mathbf{A}$ possua dois autovalores reais distintos λ e μ . Neste caso, como vimos, existem sempre dois autovetores linearmente independentes $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ associados respectivamente a λ e μ .

Fazendo uma mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u\vec{w}_1 + v\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_1^1 & w_2^1 \\ w_1^2 & w_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

como no exemplo acima, obtemos o sistema “desacoplado”:

$$\dot{u} = \lambda u$$

$$\dot{v} = \mu v,$$

cujas soluções são

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ e } v(t) = C_2 e^{\mu t}.$$

Se $C_1 = C_2 = 0$, temos a solução nula. No caso geral, o par $(u(t), v(t)) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t})$, define uma curva no plano uv , cuja ‘forma’ depende do quociente λ/μ . No que segue, vamos supor $C_1 \neq 0$ (considerações análogas valem se $C_2 \neq 0$).

2.1. $\lambda/\mu > 1$. Então temos $v(t)^\lambda = C_2^\lambda e^{\lambda\mu t}$ e $u(t)^\mu = C_1^\mu e^{\lambda\mu t}$. Portanto, $v(t) = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu} u(t)^\frac{\mu}{\lambda}$ e a curva parametrizada $(u(t), v(t))$, $-\infty < t < \infty$ coincide com o gráfico da função $v = Cu^\alpha$, $x > 0$, com $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} < 1$ e $C = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores

de C_1 e C_2 , no caso em que λ e μ são positivos. Caso ambos sejam negativos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

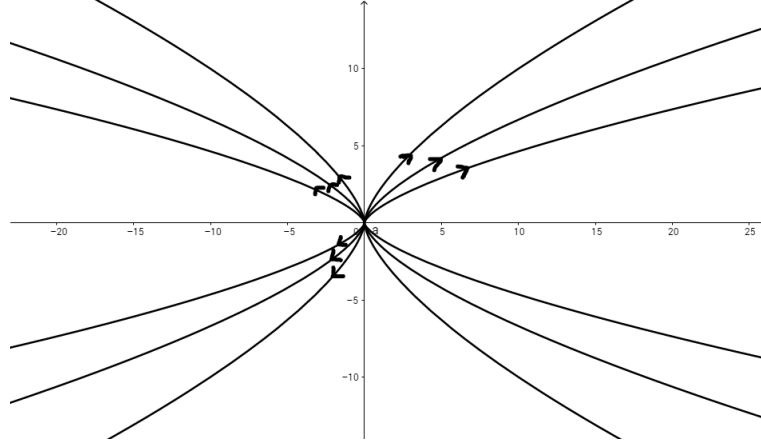
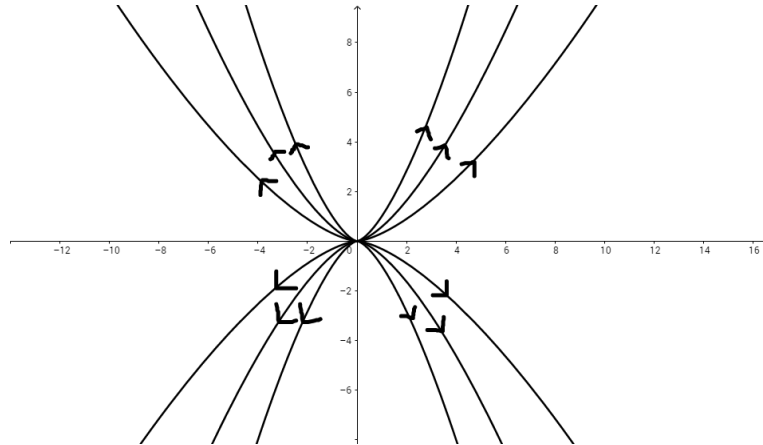
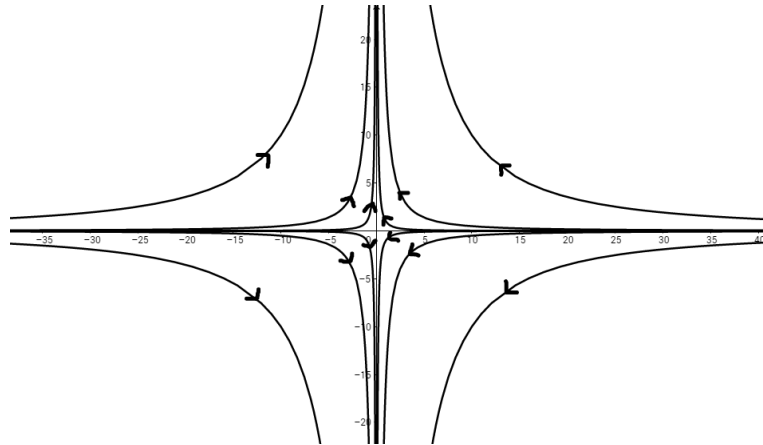


FIGURE 1. $\lambda/\mu > 1$

2.2. $0 < \lambda/\mu < 1$. De modo análogo, obtemos $v(t)^\lambda = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu} u(t)^\mu$ e a curva parametrizada $(u(t), v(t))$, $-\infty < t < \infty$ coincide com o gráfico da função $v = Cu^\alpha$, $u > 0$, com $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ e $C = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores de C_1 e C_2 . no caso em que λ e μ são positivos. Caso ambos sejam negativos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

FIGURE 2. $0 < \lambda/\mu < 1$

2.3. $\lambda/\mu < 0$. Procedendo analogamente, obtemos $v = Cu^\alpha$, $u > 0$, com $\frac{\mu}{\lambda} < 0$ e $C = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores de C_1 e C_2 . no caso em que $\lambda > 0$ e $\mu < 0$ são positivos. Trocando o sinal de ambos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

FIGURE 3. $\lambda/\mu < 0$

3. UM ÚNICO AUTOVALOR REAL

Neste caso, temos duas situações distintas. No caso mais simples, temos um único autovalor λ e o autoespaço associado tem dimensão 2, ou seja, existem duas autofunções a *duas autofunções* linearmente independentes w_1 e w_2 associadas a λ . Nesse caso, a situação é análoga ao caso de autovalores reais distintos λ e μ , que agora coincidem.

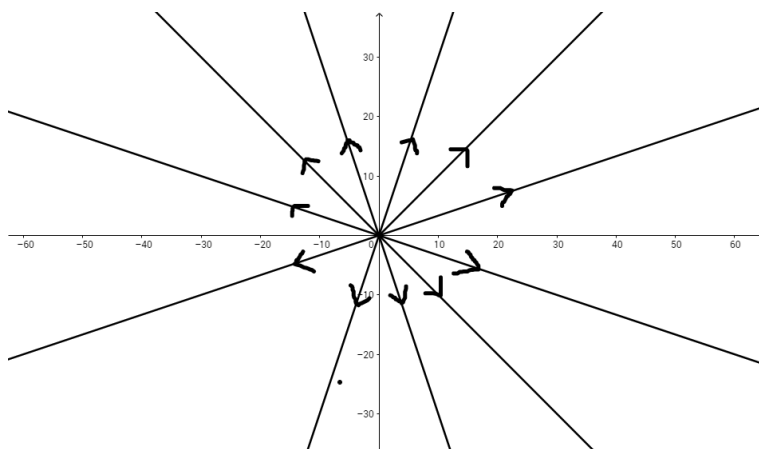


FIGURE 4. $\lambda/\mu = 1$, auto espaço de dimensão 2

3.1. $\lambda/\mu = 1$ com autoespaço de dimensão 2.

Finalmente, consideramos os casos em que não podemos encontrar duas autofunções linearmente independentes. Como veremos, nesse caso a matriz do sistema não pode ser diagonalizada e, portanto, não podemos transformar o sistema original em um sistema "desacoplado" por uma mudança linear de coordenadas.

4. UM ÚNICO AUTOVALOR REAL COM AUTOESPAÇO DE DIMENSÃO 1

Consideremos o seguinte:

Exemplo 2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 18y \\ \dot{y} &= 2x - 9y\end{aligned}$$

ou, em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A equação característica é $(\lambda + 3)^2 = 0$ e, portanto, o único autovalor é $\lambda = -3$

Para encontrar os autovetores associados a -3 , devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo $x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

tomando $y = 1$, obtemos o autovetor associado

$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = -3$ será um

múltiplo de v e, portanto, *não existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores da matriz dos coeficientes A .* Vamos então procurar

um *autovetor generalizado*, ou seja um vetor w tal que $(A - \lambda)w = v$. onde $\lambda = -3$ é o único autovalor da matriz A e v é autovetor associado. Temos então a equação:

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obtendo $2x - 6y = 1 \Leftrightarrow x = 3y + 1/2$.

tomando $y = 0$, obtemos o autovetor generalizado

$$v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, nas novas variáveis u e v , o sistema se torna

$$\dot{u} = -3u + v$$

$$\dot{v} = -3v.$$

Da segunda equação, obtemos

$v(t) = C_1 e^{-3t}$ e, substituindo na primeira

$\dot{u} + 3u = C_1 e^{-t}$, de onde $u(t) = C_2 t e^{-3t} + C_1 e^{-3t}$.

Segue um esboço da curva $(u(t), v(t))$, para alguns valores das constantes C_1 e C_2 .

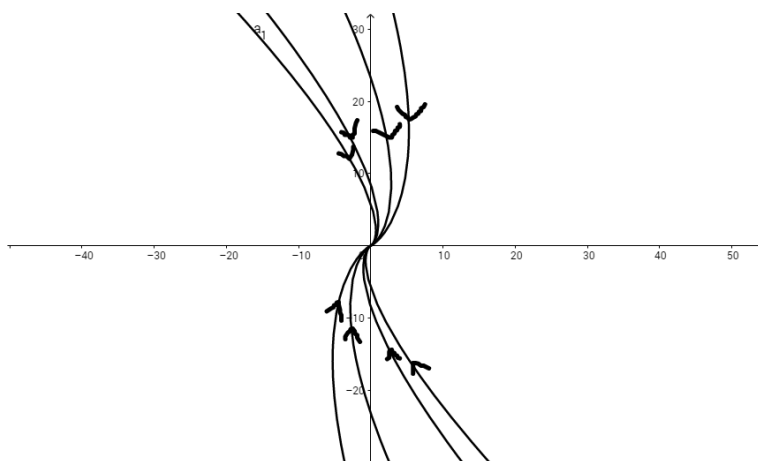


FIGURE 5. $\lambda/\mu = 1$, autoespaço de dimensão 1

De fato, pode-se mostrar que o procedimento acima pode ser estendido para o caso geral de um único autovalor real com autoespaço de dimensão 1, ou seja dado o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

se a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, possui um único autovalor real λ , associado ao autovetor v , então podemos sempre encontrar um autovetor generalizado w , tal que $(A - \lambda)w = v$. Seja $\mathbf{B}^{-1}$ a matriz cujas colunas são os vetores v e w e u, v novas variáveis definidas por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, nas novas variáveis u e v , o sistema se torna

$$\dot{v} = \lambda v.$$

$$\dot{u} - \lambda u = C_1 e^{\lambda t}, \text{ de onde } u(t) = C_2 t e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda t}.$$

FIGURE 6. $\lambda/\mu = 1$, autoespaço de dimensão 1

5. AUTOVALORES COMPLEXOS

Suponhamos finalmente que a a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, possui um autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$, associado ao autovetor *complexo* v . Então como os coeficientes da matriz são, por hipótese, reais, teremos,

$$(A - \lambda)v = 0 \rightarrow \overline{A - \lambda}\bar{v} = 0 \rightarrow (A - \bar{\lambda})\bar{v} = 0.$$

Portanto, $\bar{\lambda}$ é outro autovalor de A associado ao autovetor $\bar{v}$. Passando então para o campo complexo, podemos proceder exatamente como no caso de autovalores reais distintos, obtendo, após uma mudança de variáveis linear, as soluções *complexas*.

$\xi(t) = e^{\lambda t}v = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)v$ e $\eta(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{v} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)\bar{v}$.

Escrevendo agora $v = v_1 + v_2$, teremos

$$\xi(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t v_1 - \operatorname{sen} \beta t v_2) + i e^{\alpha t}(\cos \beta t v_2 + \operatorname{sen} \beta t v_1)$$

$$\eta(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t v_1 - \operatorname{sen} \beta t v_2) - i e^{\alpha t}(\cos \beta t v_2 + \operatorname{sen} \beta t v_1).$$

Usando o princípio da superposição, obtemos as soluções reais:

$$u(t) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = e^{\alpha t}(\cos \beta t v_1 - \operatorname{sen} \beta t v_2) \text{ e}$$

$$v(t) = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = e^{\alpha t}(\operatorname{sen} \beta t v_1 + \cos \beta t v_2).$$

A solução geral será dada pela combinação linear

$$C_1 u(t) + C_2 v(t) =$$

$$e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t)v_1 + e^{\alpha t}(C_2 \cos \beta t - C_1 \operatorname{sen} \beta t)v_2.$$

Observemos adicionalmente que,

$$Av = \lambda v \Rightarrow A(v_1 + i v_2) = (\alpha + i\beta)(v_1 + i v_2) \Rightarrow A(v_1) = \alpha v_1 - \beta v_2$$

$$\text{e } A(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_1$$

Portanto, a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$ será

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

As soluções $u(t), v(t)$, obtidas acima serão as soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Abaixo, algumas trajetórias para diferentes valores dos parâmetros α e β , C_1, C_2 .

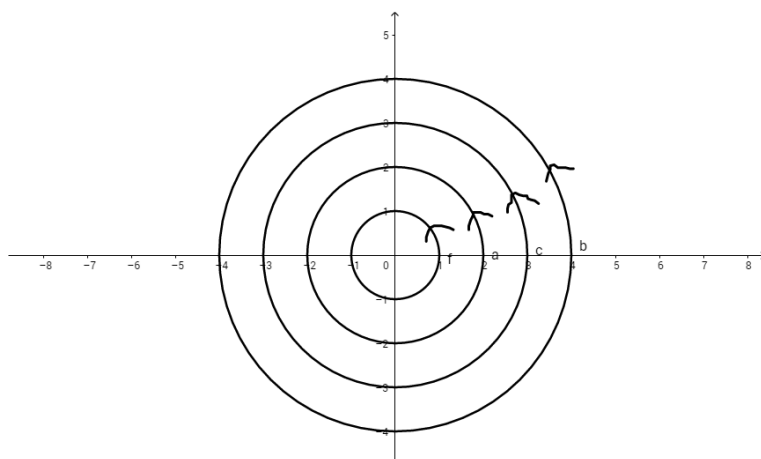


FIGURE 7. $\lambda = 2\pi i$

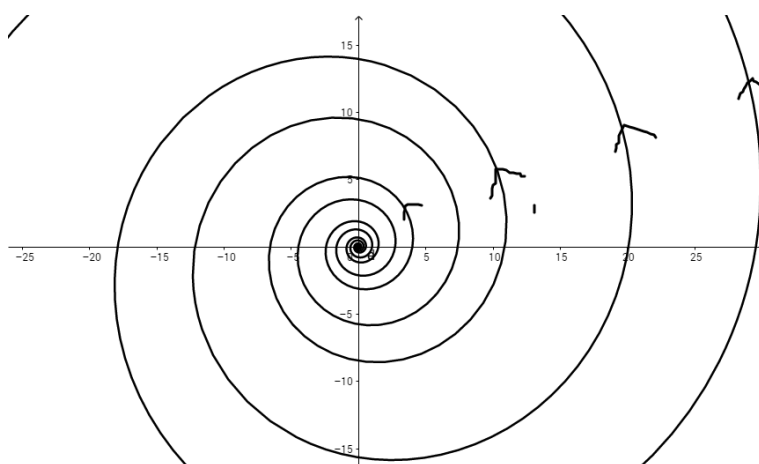
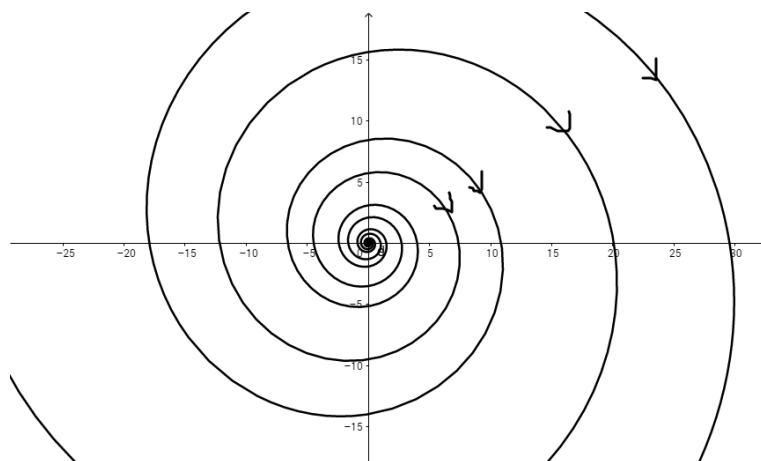


FIGURE 8. $\lambda = 1 + 2\pi i$

FIGURE 9. $\lambda = 1 - 2\pi i$