A GEOMETRIA DO TAXISTA

Sérgio Alves

IME-USP

I. Introdução

Um completo entendimento da Geometria Euclidiana só é possível após algum contato com uma Geometria não-euclidiana. Entre os vários exemplos de tais geometrias, as mais adequadas deveriam satisfazer pelo menos três condições:

1. Ser semelhante à Geometria Euclidiana em sua estrutura axiomática;
2. Ter aplicações significativas;
3. Ser de fácil compreensão para uma pessoa que inicia seus estudos de Geometria.

A primeira condição elimina não somente as chamadas geometrias finitas como também a geometria elíptica definida sobre a superfície esférica.

A mais famosa geometria não-euclidiana, conhecida como Geometria Hiperbólica, satisfaz a condição 1, pois difere da Geometria Euclidiana somente na formulação do postulado das paralelas. Além disso, a condição 2 também é verificada uma vez que possui várias aplicações em Física e Astronomia. Infelizmente, a Geometria Hiperbólica falha na condição 3. O seu entendimento, em seus vários modelos, exige mais que alguns conhecimentos simples de Geometria Euclidiana. Tanto a teoria quanto as aplicações da Geometria Hiperbólica são muito sofisticadas até mesmo para um professor de Ensino Médio.

Isto tudo nos leva a considerar a chamada Geometria do Taxista. Ela difere da Euclidiana em somente um postulado, possui diversas aplicações em problemas de geografia urbana e não necessita de outro pré-requisito além de certa familiaridade com a Geometria Analítica do plano.

II. A geometria do taxista

Para descrevermos uma geometria (plana) devemos dizer quem são os seus **pontos** e as suas **retas**. Além disso, é necessário saber como são determinadas a **distância** entre dois pontos e a **medida angular**.

Na Geometria Euclidiana usual do plano, os pontos são interpretados como pares ordenados (x, y) de números reais x e y como, por exemplo, $A = (-6, 2)$ e $B = (2, 8)$.

As retas são descritas pelas soluções de equações lineares do tipo $ax + by + c = 0$ onde a, b, c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulos.

Assim, $\{(x, y) \,/\, 3x - 4y + 26 = 0\}$ é a reta determinada pelos pontos A e B acima.

Os ângulos são medidos em graus através de um transferidor ideal e as distâncias são calculadas utilizando-se o teorema de Pitágoras.

Usando-se a notação d_E para representar a distância euclidiana, o cálculo de $d_E(A, B)$ é feito considerando-se um triângulo retângulo tendo AB como hipotenusa e catetos paralelos aos eixos coordenados. Pelo teorema de Pitágoras, $d_E(A, B) = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Na Geometria do Taxista os pontos e as retas serão interpretados exatamente como na Geometria Euclidiana. Também os ângulos serão medidos da mesma maneira. A diferença está na determinação da distância entre dois pontos.

Considerando-se novamente os pontos $A = (-6, 2)$ e $B = (2, 8)$, a distância do taxista entre A e B, denotada por $d_T(A, B)$, é calculada não mais ao longo da hipotenusa AB mas agora ao longo dos catetos. Contando quantas unidades percorremos horizontalmente e verticalmente para irmos de A até B obtemos o valor $d_T(A, B) = 8+6 = 14$.

O modo como é calculado d_T sugere a distância percorrida em uma rota de taxi entre dois pontos de uma cidade ideal cujas ruas são ou paralelas ou perpendiculares entre si, daí o nome Geometria do Taxista.

Sendo $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ dois pontos arbitrários do plano, as expressões para $d_E(A, B)$ e $d_T(A, B)$ são facilmente obtidas considerando-se o ponto $C = (b_1, a_2)$ e calculando-se os comprimentos dos segmentos AC e BC.

Temos $AC = |b_1 - a_1|$, $BC = |b_2 - a_2|$ e, portanto,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \qquad (1)$$

$$d_T(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| \qquad (2)$$

Atividade 1. Sobre uma folha de papel quadriculado, assinale cada par de pontos A e B e determine tanto $d_E(A, B)$ quanto $d_T(A, B)$.

(a) $A = (5, 4)$, $B = (1, 2)$; (b) $A = (-2, 1)$, $B = (1, 5)$;
(c) $A = (4, 1)$, $B = (4, -4)$; (d) $A = (4, -3)$, $B = (-2, -3)$.

Atividade 2. Responda às questões abaixo.

(a) É verdade que se $d_T(A, B) = d_T(C, D)$ então $d_E(A, B) = d_E(C, D)$?
(b) É verdade que se $d_E(A, B) = d_E(C, D)$ então $d_T(A, B) = d_T(C, D)$?
(c) Mostre que $d_E(A, B) \leq d_T(A, B)$ é sempre verdadeira. (Sugestão: Mostre que se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ então $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$.)

Atividade 3. Assinale o ponto $A = (-2, -1)$ em uma folha de papel quadriculado. Para cada ponto P abaixo, assinale P na folha e calcule $d_T(P, A)$.

(a) $P = (1, -1)$; (b) $P = (-2, -4)$; (c) $P = (-1, -3)$; (d) $P = (0, -2)$; (e) $P = (1/2, -3/2)$;
(f) $P = (-3/2, -7/2)$; (g) $P = (0, 0)$.

Atividade 4.

(a) Desenhe o conjunto de **todos** os pontos P tais que $d_T(P, A) = 3$;
(b) Desenhe o conjunto de todos os pontos P tais que $d_E(P, A) = 3$;
(c) Invente um nome razoável para $\{P/d_T(P, A) = 3\}$;
(d) Na geometria euclidiana, a razão entre o comprimento de uma circunferência e o dobro de seu raio é uma constante chamada π cujo valor numérico é 3, 1415... . Existe uma constante análoga na Geometria do Taxista?

Atividade 5. Dados dois números reais x e y sabemos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Use este fato para verificar que $d_T(P, A) + d_T(P, B) \geq d_T(A, B)$.

Atividade 6. Assinale os pontos $A = (0, 0)$, $B = (4, 2)$ e calcule $d_T(A, B)$. Desenhe numa mesma folha cada um dos conjuntos abaixo.

(a) $\{P$ tais que $d_T(P, A) = 2$ e $d_T(P, B) = 4\}$;
(b) $\{P$ tais que $d_T(P, A) = 1$ e $d_T(P, B) = 5\}$;
(c) $\{P$ tais que $d_T(P, A) = 0$ e $d_T(P, B) = 6\}$;
(d) $\{P$ tais que $d_T(P, A) = 3$ e $d_T(P, B) = 3\}$;
(e) $\{P$ tais que $d_T(P, A) = 4$ e $d_T(P, B) = 2\}$;
(f) $\{P$ tais que $d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)\}$.

Atividade 7. Clarissa e Bruno acabam de arrumar emprego na Cidade Ideal. Ela, professora, vai trabalhar em uma escola na posição (0, 0) e ele num banco localizado em (4, 2). Bruno e Clarissa gostariam de morar num apartamento localizado de modo que a soma das distâncias que eles têm de caminhar para o trabalho fosse a menor possível. Em que região da cidade eles devem procurar o apartamento?

Atividade 8. Assinale os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (4, 2)$ em uma folha de papel quadriculado. Desenhe, nesta mesma folha, cada um dos conjuntos abaixo. Em cada ítem, utilize uma cor diferente.

(a) $\{P/\ d_T(P, A) = 1$ e $d_T(P, B) = 1\}$; (b) $\{P/\ d_T(P, A) = 2$ e $d_T(P, B) = 2\}$;
(c) $\{P/\ d_T(P, A) = 5/2$ e $d_T(P, B) = 5/2\}$; (d) $\{P/\ d_T(P, A) = 4$ e $d_T(P, B) = 4\}$;
(e) $\{P/\ d_T(P, A) = d_T(P, B)\}$.

Atividade 9. Como não encontraram nada na região onde a soma das distâncias é mínima, Clarissa e Bruno resolvem procurar um apartamento localizado num ponto de modo que ambos caminhem uma mesma distância. Aonde devem procurar?

III. Comparando a geometria do taxista com a geometria euclidiana

Temos visto no parágrafo anterior alguns conceitos geométricos com propriedades completamente distintas quando colocadas no contexto da Geometria Euclidiana e no da Geometria do Taxista. Para compreendermos melhor estas distinções é necessário que se compare as duas geometrias em relação às suas estruturas axiomáticas.

Cada geometria (plana) pode ser pensada como um sistema matemático consistindo de quatro ingredientes básicos.

1. Um conjunto $\wp$ de **pontos**.
2. Uma coleção Λ de subconjuntos não vazios de $\wp$ chamadas de **retas**.
3. Uma função **medida angular** m.
4. Uma função **distância**.

Uma simbologia informativa para a Geometria Euclidiana usual é $[\wp, \Lambda, m, d_E]$ e a simbologia correspondente para a Geometria do Taxista é $[\wp, \Lambda, m, d_T]$.

Sabemos que o sistema $[\wp, \Lambda, m, d_E]$ satisfaz a um determinado número de postulados que não serão aqui descritos. O ponto fundamental que queremos destacar é o fato de que $[\wp, \Lambda, m, d_T]$ satisfaz os mesmos postulados da Geometria Euclidiana com uma única exceção: o postulado LAL de congruência de triângulos.

LAL - Dada uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos, se dois lados e o ângulo determinado por eles do primeiro triângulo são congruentes às partes correspondentes do segundo triângulo, então a correspondência é uma congruência.

Atividade 10. Considere os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ onde $A = (0, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (1, 1)$, $A' = (2, 0)$, $B' = (4, 0)$ e $C' = (2, -2)$.

(a) É verdade que $d_T(A, B) = d_T(A', B')$?

(b) É verdade que $d_T(A, C) = d_T(A', C')$?

(c) É verdade que $m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C')$?

(d) É verdade que a correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ satisfaz às hipóteses de LAL?

(e) É verdade que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$?

Atividade 11. Apresente exemplos de triângulos não-congruentes e que, no entanto, satisfazem às hipóteses de cada um dos seguintes critérios de congruência.

(a) ALA; (b) LAA_o; (c) LLL.

Atividade 12. Considere os pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 5)$ e $C = (5, 1)$. Verifique que $d_T(A, C) = d_T(C, B) = \frac{1}{2} d_T(A, B)$ e, no entanto, C não é ponto médio do segmento AB. A desigualdade triangular é válida na Geometria do Taxista?

Atividade 13. Ainda na Geometria do Taxista:

(a) Considere os pontos $A = (0, 0)$, $B = (4, 4)$ e $C = (5, 0)$. Verifique que ΔABC é um triângulo isósceles cujos ângulos da base não são congruentes;

(b) Exiba um triângulo com dois ângulos congruentes e que não seja isósceles;

(c) Exiba um triângulo retângulo eqüilátero;

(d) O teorema de Pitágoras é verdadeiro nesta geometria?