MAT-2454 – Cálculo II
Aulas 06 e 07: Continuidade e Limites
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Continuidade: Conceito

- A intuição é a mesma: pontos próximos tem imagens próximas, gráfico não dá "saltos" etc.
- Formalmente também (com as devidas adaptações no conceito de distância no domínio)

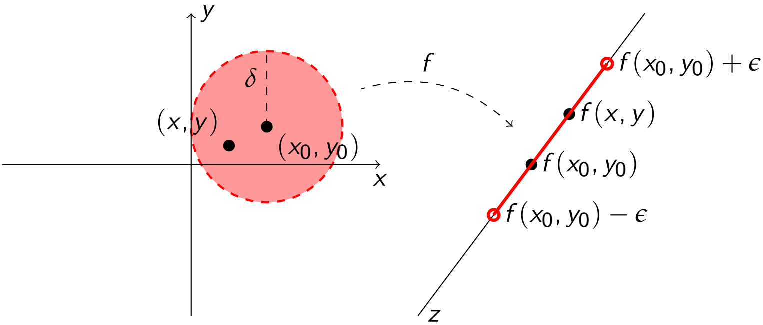


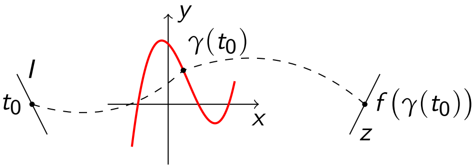
Figura: Continuidade de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Dizemos que $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em $(x_0, y_0) \in A$ se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que quando $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ temos $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$.
- Viu como é a mesma coisa?
- A continuidade só faz sentido para **pontos no domínio da função!**
- As propriedades da funções contínuas num ponto (x_0, y_0) são as mesmas: além de formarem um subespaço vetorial do espaço das funções com domínio contendo (x_0, y_0), o produto e o quociente (desde que o denominador não se anule naquele ponto) de duas dessas funções também é contínua.

- Um composição de tais funções muito importante é aquela com uma curva no plano, $\gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (precisamos que $\operatorname{Im}\gamma \subset D_f$):

$$(f \circ \gamma)\colon I \to \mathbb{R}.$$

- Essas compostas são funções como as que estudamos no cálculo 1 e vão ajudar a entender o comportamento de f.



- Se γ e f são contínuas, em t_0 e $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ respectivamente, então $f \circ \gamma$ é contínua em t_0.
- Isso mostra que se, ao longo de alguma curva contínua γ que passa por (x_0, y_0), $f \circ \gamma$ for descontínua, então f será descontínua em (x_0, y_0).

Exemplos

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ constante é contínua.
- Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, então suas restrições aos eixos coordenados também o são, pois são as compostas de f com curvas contínuas que parametrizam tais eixos.
- Com isso vemos que se f se escreve como soma, produtos, quocientes ou compostas de expressões, que dependem continuamente de cada uma de suas varíaveis, então é contínua.
- Um conceito que permite detectar a continuidade ou descontinudade de f num ponto é o de limite:

LIMITES

- Objetivo é estudar o comportamento da função na vizinhança de um ponto (que pode não estar no domínio, mas precisa estar "arbitrariamente próximo" de pontos do domínio). Tais pontos são chamados *ponto de acumulação* do domínio de f.
- Se (x_0, y_0) é um ponto de acumulação de A, dizemos que $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem limite $L \in \mathbb{R}$ em (x_0, y_0) se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que quando $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ temos $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$.
- Notação: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.
- Compare criticamente com a definição de continuidade.
- Como calcular?

TEOREMA (LIMITE DE FUNÇÕES CONTÍNUAS)

Se f é contínua em (x_0, y_0) (e portanto definida ali), temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

TEOREMA (DO CONFRONTO)

Se $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$, com

1. *g limitada numa vizinhança de (x_0, y_0) (ou seja $|g(x,y)| < M$ nessa vizinhança) e*
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 0,$

então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$

Teorema (Limite ao longo de curvas)

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Então $\lim_{t\to t_0} (f\circ\gamma)(t) = L$, para toda curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, contínua em $t_0 \in I$ tal que $\operatorname{Im}\gamma \subset D_f$.

- A maneira mais interessante de usar o resultado acima é na contrapositiva: se existem duas curvas, ao longo das quais os limites das compostas são distintos, então f não tem limite naquele ponto.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+1)\sin(yx) - \sqrt{x^2+(y-4)^2}}{(x-1)^3+y^2}$:

  como a função em questão é contínua no ponto $(0,0)$, temos que
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 4.$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$:

  podemos fazer $u = x^2+y^2$ e então $(x,y)\to(0,0) \iff u\to 0$, logo
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$:
  1. como $0 \leq x^4 \leq x^4 + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, temos que
  $$0 < \frac{x^4}{x^4+y^2} < 1,$$
  um fator limitado.
  2. Além disso,
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x^2+y^2) = 0 \quad \text{(por quê?)}.$$
  3. Logo
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}_{\text{limitado}} \underbrace{\sin(x^2+y^2)}_{\to 0} = 0.$$
- Como mostrar que algo é limitado? Vem pra aula!

Exemplos - III

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$:
  1. Compondo com a curva $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ temos
  $$\lim_{t\to 0}(f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t \times 0}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$
  2. A curva $\gamma_2(t) = (0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, dá o mesmo valor e portanto não ajuda... (Por que mesmo?)
  3. Compondo com a curva $\gamma_3(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ temos
  $$\lim_{t\to 0}(f \circ \gamma_3)(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t \times t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

  Logo concluimos que o limite em questão não existe.
- Como encontrar as "curvas certas"? Vem pra aula!

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 9.1 e 9.2**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seção 14.2**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br