verdadeira

1) Se p é primo então $x^p \equiv x \ (p)$

Logo $(a^p)^p \equiv a^p \equiv a \pmod p$.

2) Falso Por exemplo a equação $x^2 - 1 = 0$ tem 4 soluções em $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ que são $\{\bar 1, \bar 3, \bar 5, \bar 7\}$

3) Se $p \in \mathbb{Z}[x]$ e $p(\alpha) = 0$ então em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$p(\bar\alpha) = \bar 0$ Logo o resultado é verdadeiro

4) Falso o algoritmo de Euclides diz que existem um únicos par (q, r) talque

$a = bq + r$ e $0 \le r < |b|$.

6) Falso por exemplo $8 \mid 2 \cdot 4$ e $8 \nmid 2$ e $8 \nmid 4$.

5) 13 é primo $13 \nmid 59$ Logo pelo teorema de Fermat $59^{12} \equiv 1 \ (13)$ isto é $13 \mid 59^{12} - 1$.

7) $x^2 \equiv 1$ ou $0 \pmod 4$ pois $\bar 0^2 = \bar 0$, $\bar 1^2 = \bar 1$, $\bar 2^2 = \bar 0$ e $\bar 3^2 = 1$.

Logo o resultado é verdadeiro

8) Falso por exemplo $x^2 + x = p(x)$ em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tem raizes $\bar 0$ e $\bar 1$ e não é o polinômio nulo.

(na verdade se $\#K < \infty$ então $\prod_{a \in K} (x - a_i) \neq 0$ e se anula em todos os elementos de K

9) Sim entre 4 inteiros consecutivos pelo menos um é múltiplo de 4 e pelo menos um é múltiplo de 3. Logo o produto é múltiplo de 12

10) verdadeiro. Uma prova é a seguinte

Seja $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ e $b = \prod p_i^{\beta_i}$ p_i primos distintos $\alpha_i, \beta_i \ge 0$

$mdc = \prod p_i^{\min\{\alpha_i, \beta_i\}}$ $mmc = \prod p_i^{\max\{\alpha_i, \beta_i\}}$

a hipotese implica $\min\{\alpha_i, \beta_i\} = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$

Logo $\alpha_i = \beta_i$ para todo i logo $a = b$.