

Lista de Exercícios N° 4 Entregar dia 23/04

1) De exemplo de um conjunto $S \neq \emptyset$ com uma relação $R \neq \emptyset$ tal que:

a) R seja Reflexiva, Transitiva e não simétrica

b) R seja Reflexiva simétrica e não trans.

c) R seja simétrica, transitiva e não reflexiva.

2) Seja em $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ a seguinte relação

$$\forall \begin{matrix} x, y \\ x', y' \end{matrix} \quad (x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x y' = y x'.$$

mostre que R é uma relação de equivalência.

denote por a/b a classe de

equivalência do par (a, b) .

mostre que 1) $0/b = \{(0, a) : a \in \mathbb{Z}^*\}$

2) $1/b = \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}^*\}$

Agora defina em $S/R \doteq \mathcal{Q}$

as seguintes operações $(+, \cdot)$

$$i) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \doteq \frac{ad + bc}{bd}$$

$$ii) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \doteq \frac{ac}{bd}$$

- a) Mostre que essas operações estão bem definidas. (Se você entender o que estou pedindo o resto é fácil).
- b) mostre que $0/1 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
- c) mostre que $1/1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
- d) mostre que $(\mathbb{Q}, +)$ é grupo abeliano isto é:
- i) $+$ é associativa, comutativa, tem elemento neutro e todo elemento tem um oposto.
 - ii) mostre que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ é grupo abeliano.
 - iii) mostre que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- e) mostre que todo elemento de $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tem um inverso multiplicativo

5) Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por

$$f(a) = a/1$$

mostre que f é injetora e que

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ e}$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

3) Seja $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função definida por $f(x, y) = x$.

Descreva as classes de equivalência das fibras, isto é, as classes de equivalência definidas por f na aula.

4) Seja $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que

$$g(0) = 0/1 \text{ e } g(x+y) = g(x) + g(y)$$

mostre que g é a função definida no exercício 2.5.

5) Enuncie e demonstre o teorema

fundamental da aritmética.

(Pode fazer a demonstração só para inteiros maiores que 1.)