1) Esboce o gráfico da curva com equação vetorial $\vec{r}(t) = \langle t+1, t, 2t \rangle$.

Sol.:

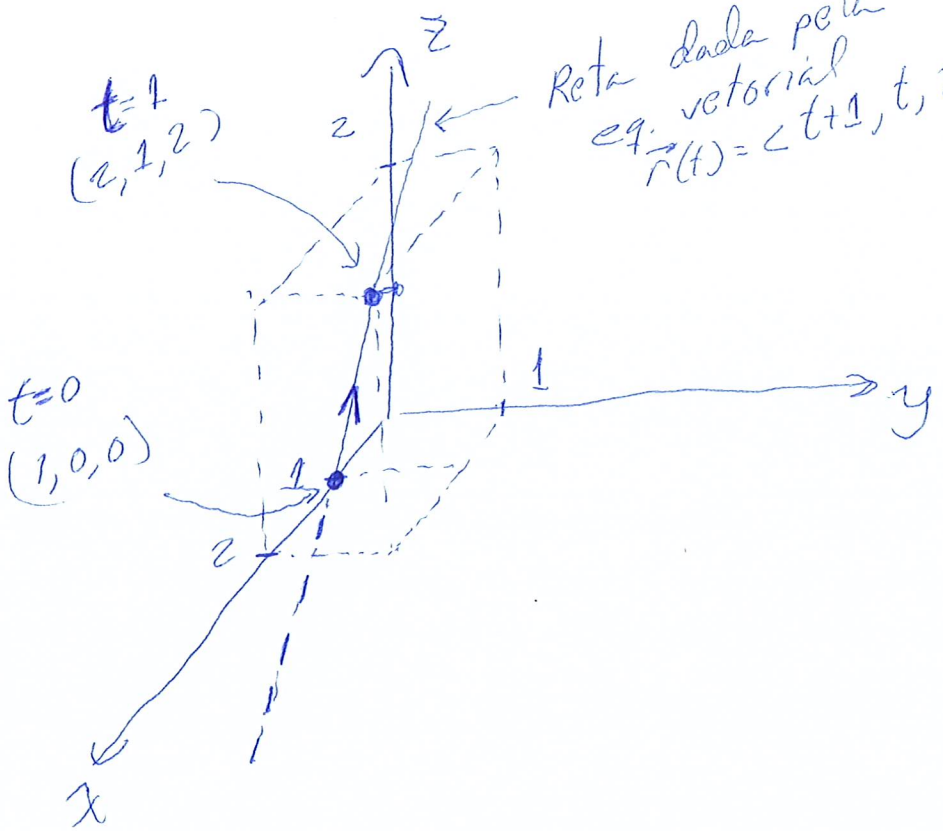
$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 0 + t \\ z(t) = 0 + 2t \end{cases}$$

Eq. Paramétricas de uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1,0,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1,1,2)$.

para $t = 1$ temos

$x(1) = 2$
$y(1) = 1$
$z(1) = 2$.

Logo a reta passa pelo ponto $(1,0,0)$ em $t=0$ e pelo ponto $(2,1,2)$ em $t=1$.



2) Determine a curvatura da elipse dada pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t) \rangle$$

com a e b parâmetros reais e positivos

<u>Sol.:</u> Este problema está resolvido no vídeo 157

A curvatura pode ser calculada pela expressão

$$K(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t), 0 \rangle$$ ← Transformamos o vetor $\vec{r}$ bidimensional em tridimensional para poder calcular o produto vetorial

$$\vec{r}'(t) = \langle -a\,\mathrm{sen}(t), b\cos(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle -a\cos(t), -b\,\mathrm{sen}(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\,\mathrm{sen}(t) & b\cos(t) & 0 \\ -a\cos(t) & -b\,\mathrm{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, ab \rangle$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = ab$$

$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)} \neq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{K(t) = \frac{ab}{\left(a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)\right)^{3/2}}}$$

Note que se $a = b = r$ a elipse se transforma em uma circunferência e sua curvatura é

$$\boxed{K = \frac{1}{r}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3) Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é

$$\vec{r}(t) = \langle \cosh(t), \operatorname{senh}(t), t \rangle$$

Sol.:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{r}\,'(t) = \langle \operatorname{senh}(t), \cosh(t), 1 \rangle \\ \vec{a}(t) &= \vec{r}\,''(t) = \langle \cosh(t), \operatorname{senh}(t), 0 \rangle \end{aligned}}$$

$$v(t) = \| \vec{v}(t) \| = \sqrt{\operatorname{senh}^2(t) + \cosh^2(t) + 1}$$

velocidade escalar

como $\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$ ← Identidade Fundamental

$$\operatorname{senh}^2(t) = \cosh^2(t) - 1$$

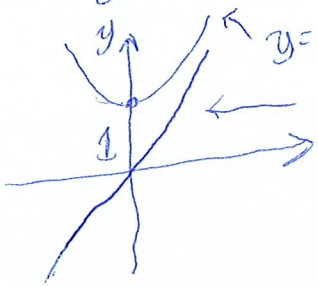
$$v(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1 + \cosh^2(t) + 1}$$

$$v(t) = \sqrt{2\cosh^2(t)} = \sqrt{2}\,|\cosh(t)|$$

mas $\cosh(t) > 0 \quad \forall t$

$y = \cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$y = \operatorname{senh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$



$$\boxed{v(t) = \sqrt{2}\cosh(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(\cosh(t)) = \operatorname{senh}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{senh}(t)) = \cosh(t)$$

4) Esboce o gráfico da função (4)

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5.$

Sol.: Inicialmente vamos completar quadrados

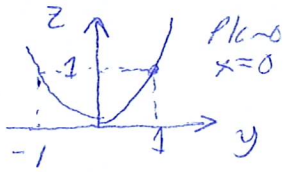
$f(x,y) = \underbrace{x^2 - 4x + \overset{0}{\overbrace{4}} - 4}_{} + \underbrace{y^2 - 2y + \overset{0}{\overbrace{1}} - 1}_{} + 5$

$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$

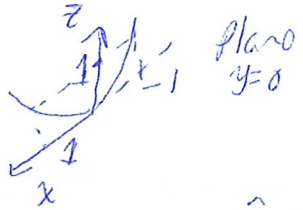
$z = (x-2)^2 + (y-1)^2$

- Uma versão mais simples é a eq. $z = x^2 + y^2$
- Nesta podemos considerar as projeções nos planos coordenados

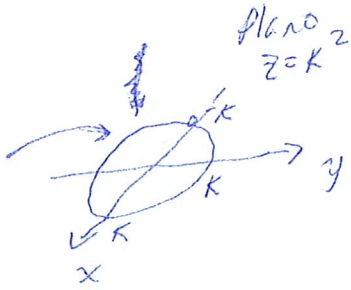
- $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$



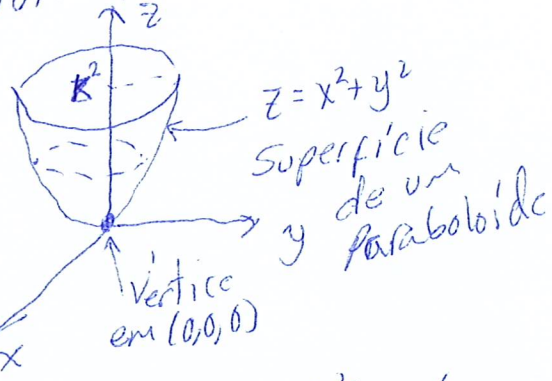
- $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$



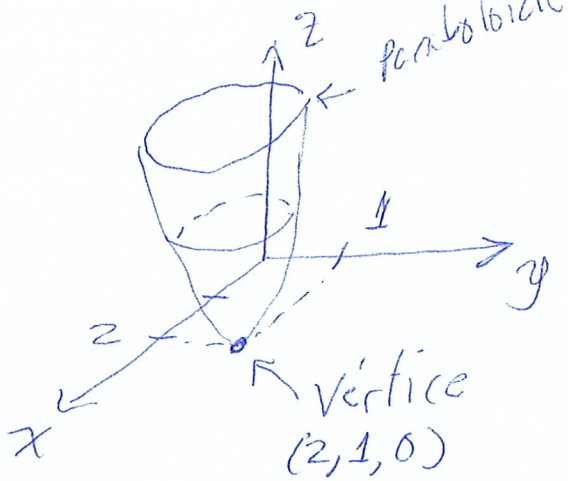
- $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k^2 \text{ (cte)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ z = k^2 \end{cases}$ ← circunferências



→ Juntando temos



$z = (x-2)^2 + (y-1)^2$ é um parabolóide com ~~centro~~ vértice no ponto (2, 1, 0)



5) Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se

$$xe^y + yz + z\ln(x^2) = 7$$

Sol.: Seja $f(x,y,z) = xe^y + yz + z\ln(x^2)$

$$f_x(x,y,z) = e^y + \frac{z}{x^2}2x = e^y + 2\frac{z}{x}$$

$\ln(x^2) = 2\ln(x$

$$f_y(x,y,z) = xe^y + z$$

$$f_z(x,y,z) = y + \ln(x^2) = y + 2\ln(x)$$

Temos $f(x,y,z) = 7 =$ de

Valem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\left(e^y + \frac{2z}{x}\right)}{(y + 2\ln(x))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{(xe^y + z)}{(y + 2\ln(x))}$$

$\Rightarrow y + 2\ln(x) \neq 0$

Outra alternativa era colocar z em evidência

$$xe^y + z(y + 2\ln(x)) = 7$$

$$z(y + 2\ln(x)) = 7 - xe^y$$

$$z(x,y) = \frac{7 - xe^y}{y + 2\ln(x)}$$

Este último procedimento não é sempre possível. Agora deriva normalmente para chegar no resultado anterior.