

PSI 3481
**SISTEMAS ÓPTICOS E DE MICRO-
ONDAS**

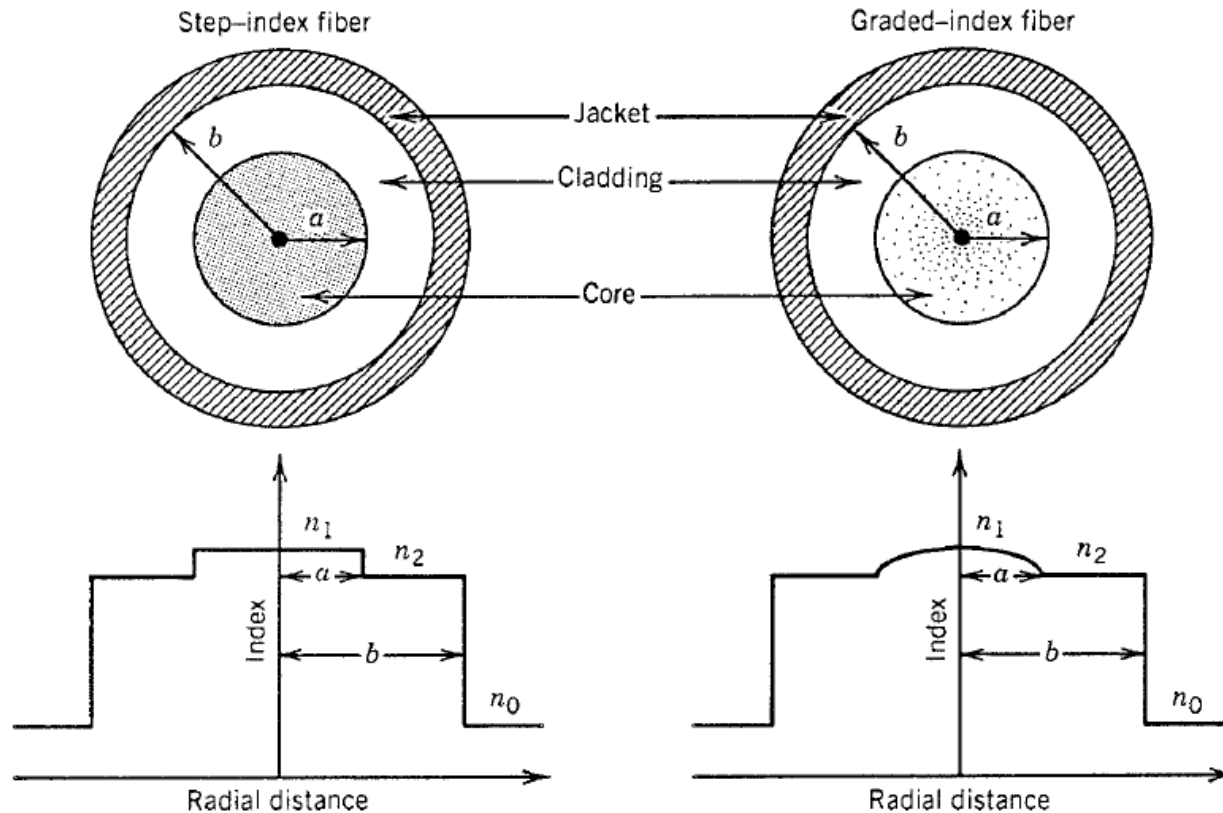
Fibras Ópticas

Fibras Ópticas

- Luz guiada: reflexão interna total (1854)
- Fibra Óptica: multicamadas (1950).
 - Antes de 1970: perda $\cong 1000$ dB/Km
 - Em 1970: perda $\cong 20$ dB/Km
 - Em 1979: perda $\cong 0,2$ dB/Km ($1,55 \mu\text{m}$).

Fibras Ópticas

Fibras Ópticas Multimodo



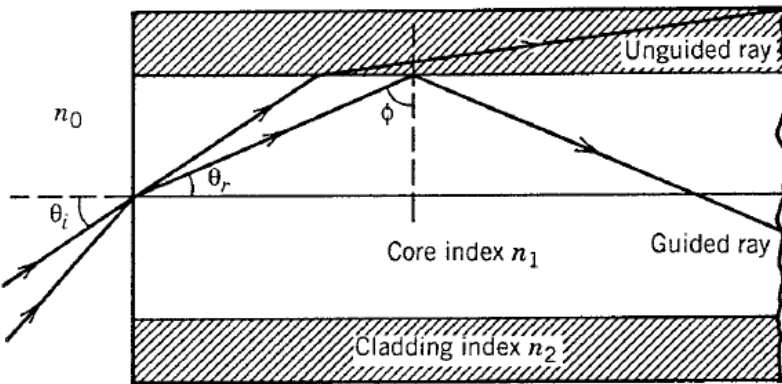
Fibra com perfil com perfil em degrau do índice de refração

Fibra com perfil com perfil graduado do índice de refração

Fibras Ópticas Multimodo

Aproximação de óptica geométrica

Perfil em degrau do índice de refração



Lei de Snell nas diferentes interfaces

Interface de excitação

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r$$

Interface núcleo/camada externa

$$n_1 \sin \phi = n_2 \sin \phi_r$$

Condição crítica para o guiamento da luz

$$n_0 \sin \theta_i = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

Apertura numérica

$$NA = n_0 \sin \theta_i$$

$$NA = n_1 (2\Delta)^{1/2}$$

$$\Delta = (n_1 - n_2)/n_1 \quad \leftarrow \text{Diferença relativa de índice}$$

Tempo de atraso

$$\Delta T = \frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta$$

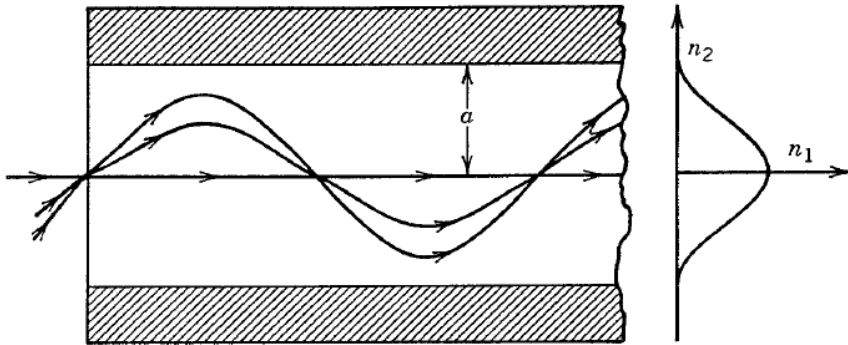
Figura de mérito BL da fibra

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta}$$

Fibras Ópticas Multimodo

Aproximação de óptica geométrica

Perfil graduado do índice de refração: $n(\rho) = \begin{cases} n_1[1 - \Delta(\rho/a)^\alpha]; & \rho < a, \\ n_1(1 - \Delta) = n_2; & \rho \geq a, \end{cases}$



α : parâmetro do perfil do índice de refração

Aproximação para-axial

Eliminação da dispersão modal

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{d\rho}$$

$$z = 2m\pi/p,$$

Para $\alpha = 2$

$$\rho = \rho_0 \cos(pz) + (\rho'_0/p) \sin(pz),$$

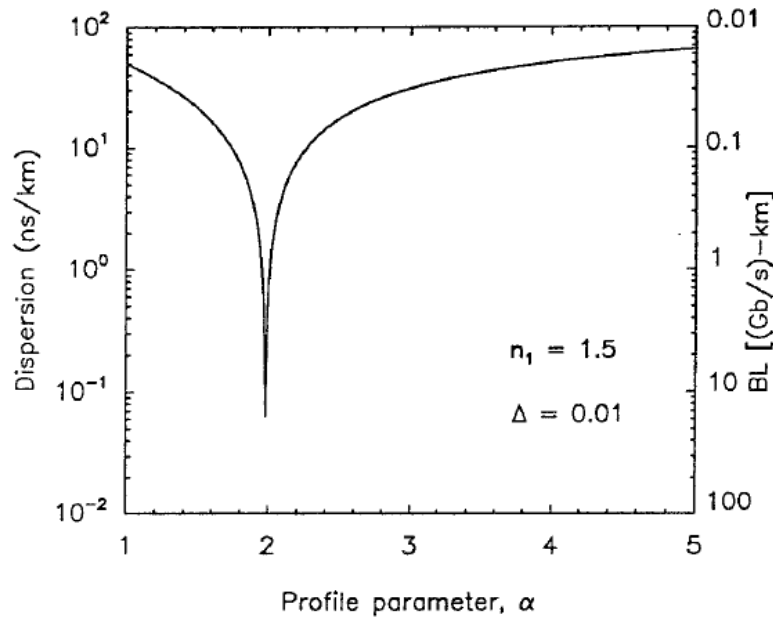
$$p = (2\Delta/a^2)^{1/2}$$

Fibras Ópticas Multimodo

Aproximação de óptica geométrica

Perfil graduado do índice de refração

Fibra multimodo na pratica



Curva de dispersão intermodal $\Delta T/L$ em função do parâmetro de perfil do índice de refração

Mínimo da curva de dispersão intermodal

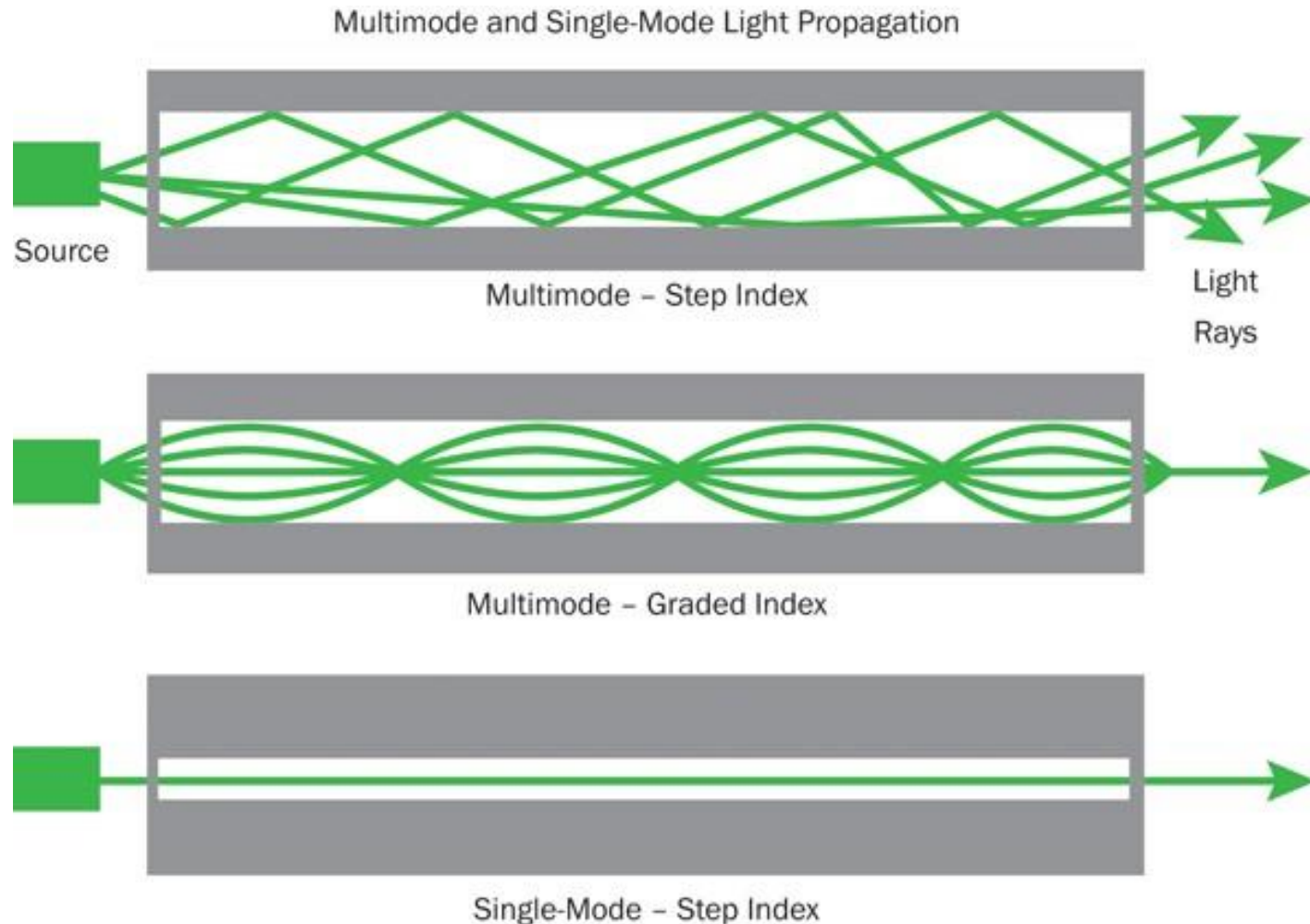
em: $\alpha = 2(1 - \Delta)$

$$\Delta T/L = n_1 \Delta^2 / 8c$$

Figura de mérito BL da fibra

$$BL < 8c/n_1 \Delta^2$$

Representação da propagação da luz através de fibras multimodo e monomodo



Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

Equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

Equações constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

Equação de onda para meios

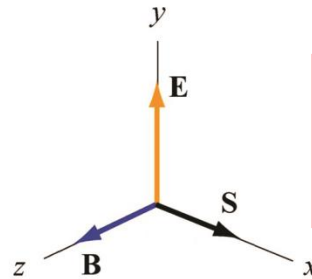
Homogêneos:

(Equação de Helmholtz)

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + n^2(\omega) k_0^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$

$$k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$$

Vetor de Poynting: Potência transportada pela onda ou densidade do fluxo de energia.



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\text{Watts/m}^2]$$

Densidade de energia eletromagnética

$$u = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 |H|^2 = \epsilon \epsilon_0 |E|^2 \quad \left[\frac{\text{Joules}}{\text{m}^3} \right]$$

Equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Intensidade: media temporal do modulo do vetor de Poynting

$$I = \langle S \rangle_t = \frac{1}{c \mu \mu_0} \overline{|E|^2} = \frac{1}{2 c \mu \mu_0} E_P^2 \quad \left[\frac{\text{Watts}}{\text{m}^2} \right]$$

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra com perfil graduado do índice de refração

$$n^2(r) = n^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2 \right) \quad \text{Perfil do índice de refração}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad \text{Equação de onda}$$

$$E_{l,m}(x, y, z) = E_0 H_l \left(\sqrt{2} \frac{x}{\sigma} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{\sigma} \right) \exp \left(- \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \quad \text{Forma da onda}$$

$$\beta_{l,m} = k \left[1 - \frac{2}{k} \sqrt{\frac{n_2}{n}} (l + m + 1) \right]^{1/2} \quad \text{Vetor de propagação}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{1}{nn_2} \right)^{1/4} \quad \text{Tamanho do feixe guiado}$$

Polinômios de Hermite

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + 2mH = 0$$

Equação de Hermite

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Formula de recorrência

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

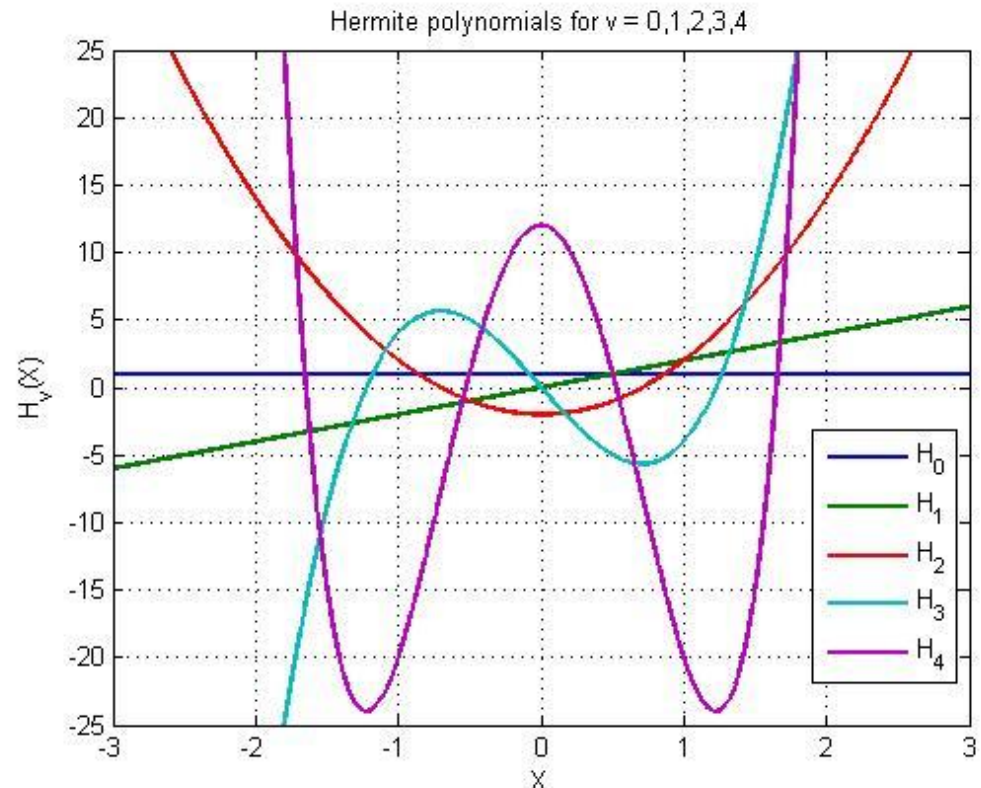
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Equação do Oscilador Harmônico

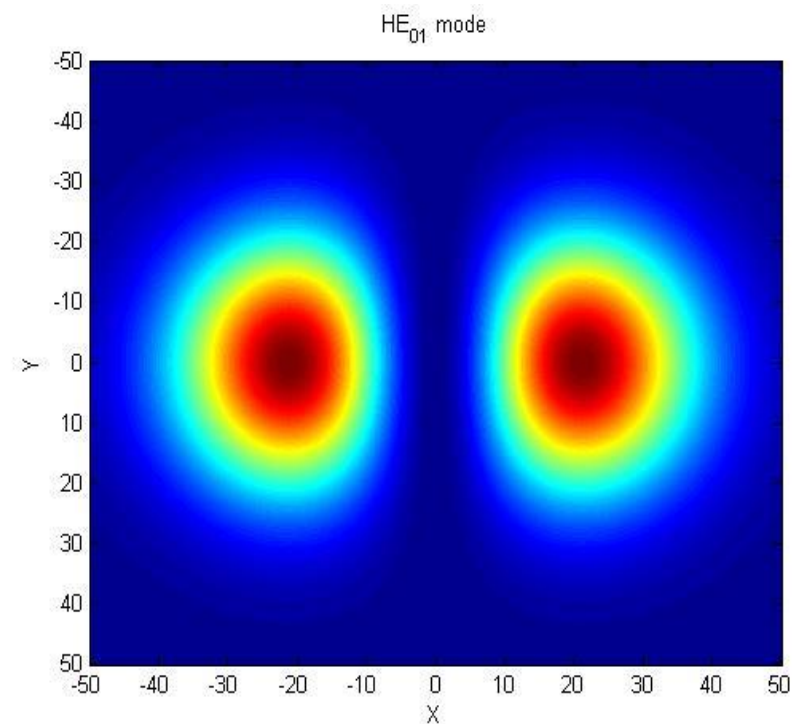
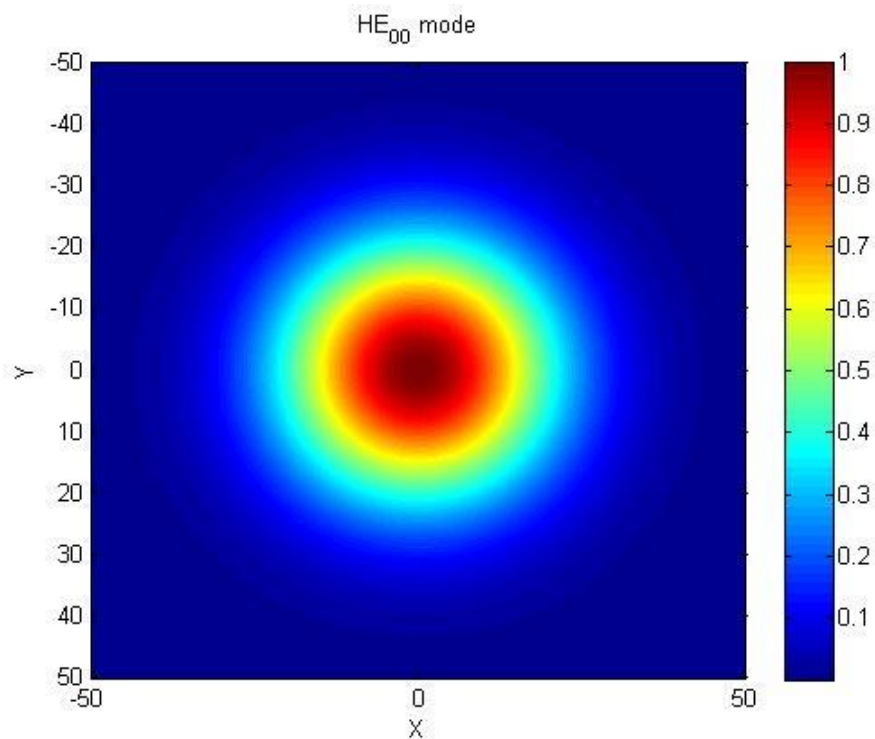
$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (2m + 1 - x^2)\psi = 0$$

$$\psi(x) = AH_m \left(\frac{\sqrt{2}}{a} x \right) \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

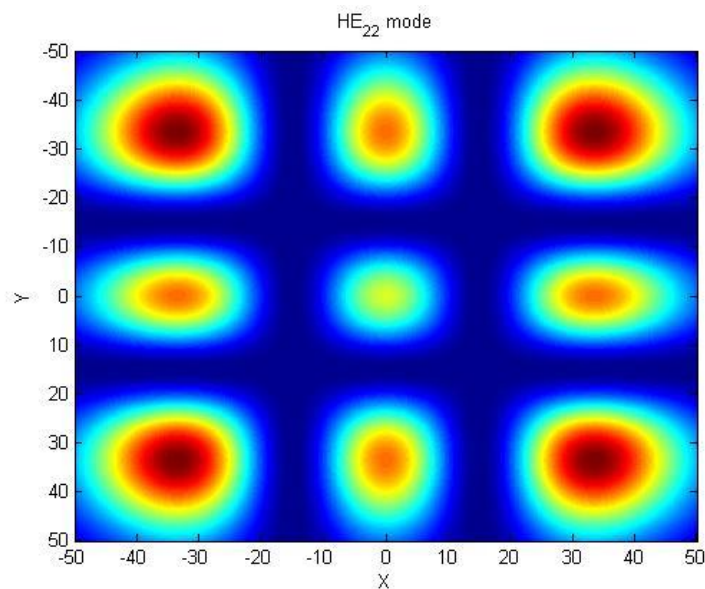
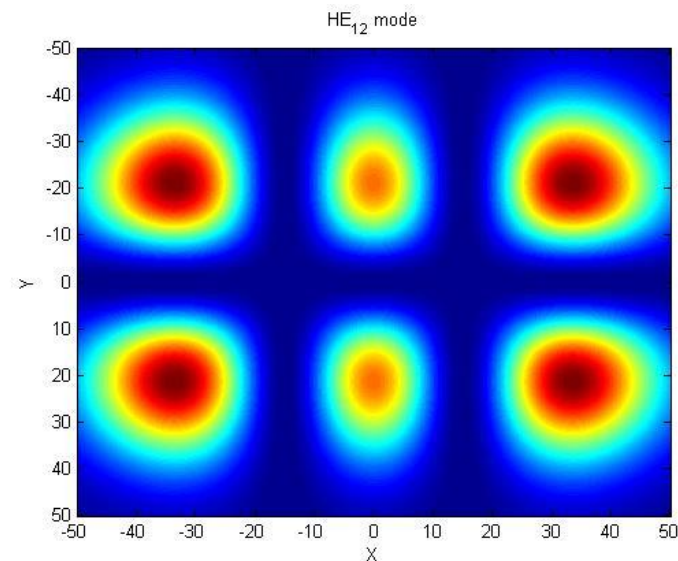
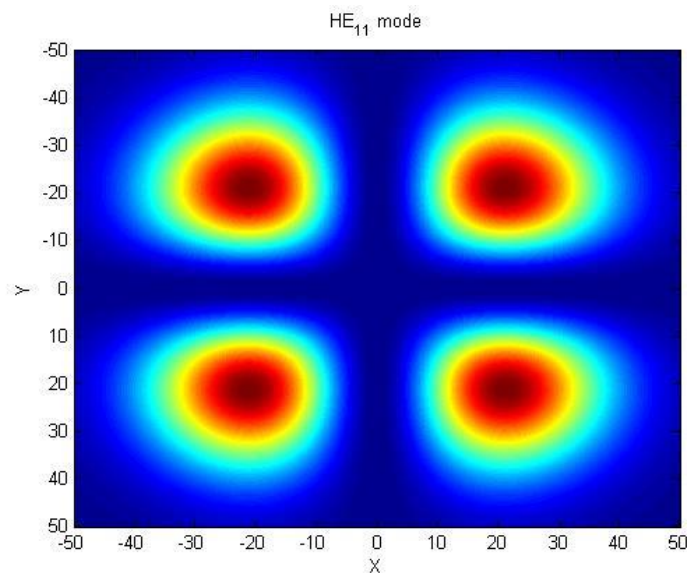
$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$



Perfil da intensidade do campo elétrico para os modos normais de uma fibra óptica com índice de refração de perfil graduado



Perfil da intensidade do campo elétrico para os modos normais de uma fibra óptica com índice de refração de perfil graduado

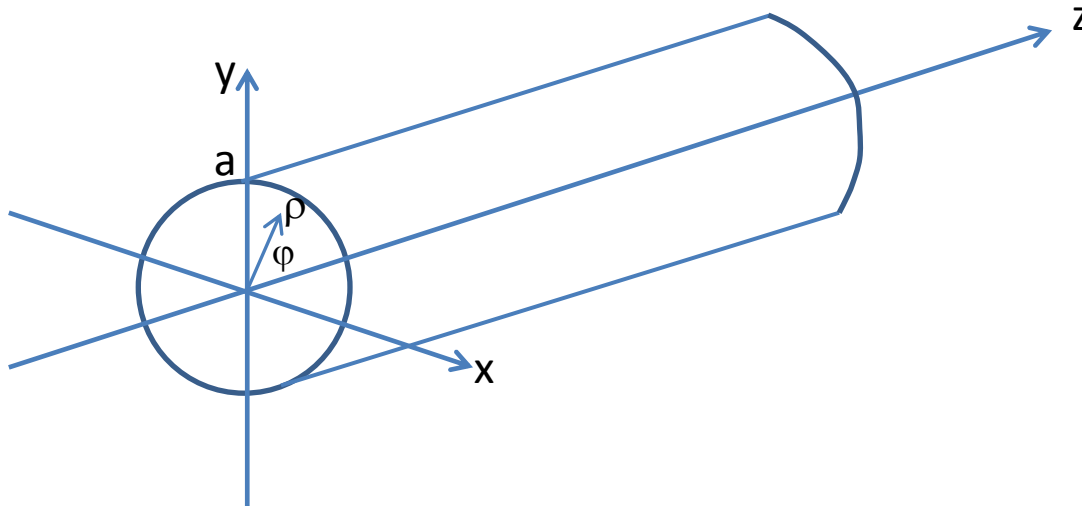


Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

$$n = \begin{cases} n_1; & \rho \leq a, \\ n_2; & \rho > a. \end{cases} \quad \text{Perfil do índice de refração}$$



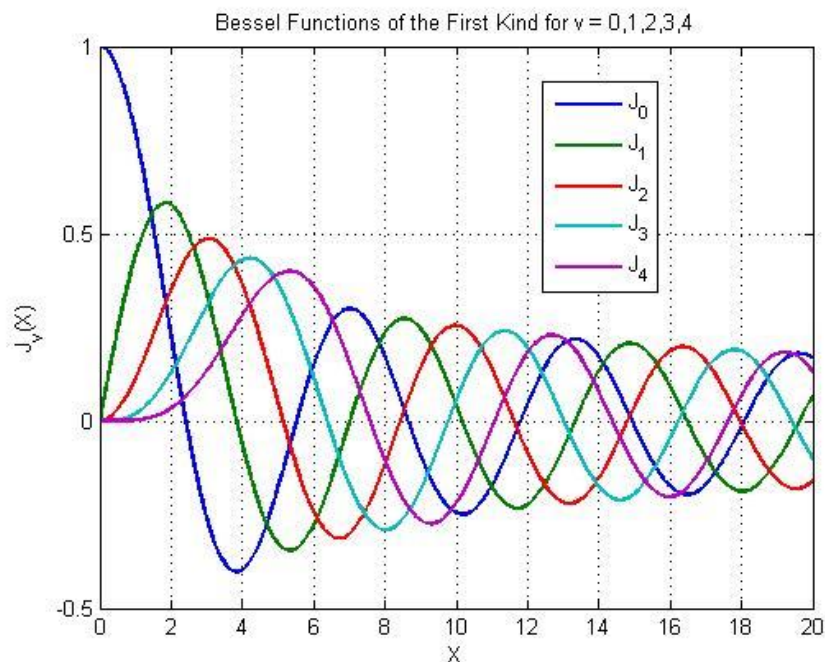
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_z = 0,$$

Equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas

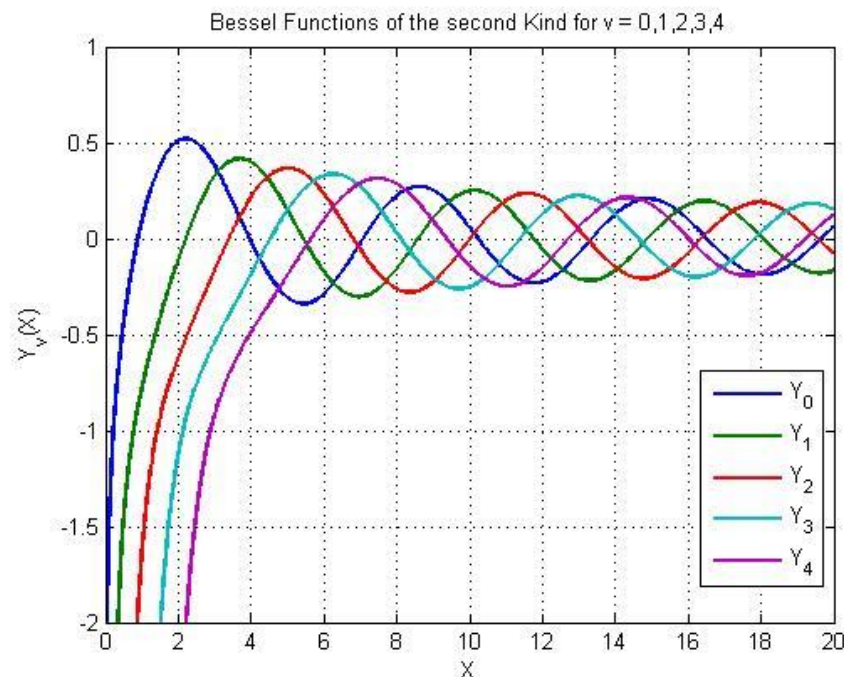
Funções de Bessel do tipo $J_n(x)$ e $Y_n(x)$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$y(x) = J_n(x)$$



$$Y_n(x) = \lim_{\gamma \rightarrow n} \frac{\cos(\gamma\pi) J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(\gamma\pi)}$$

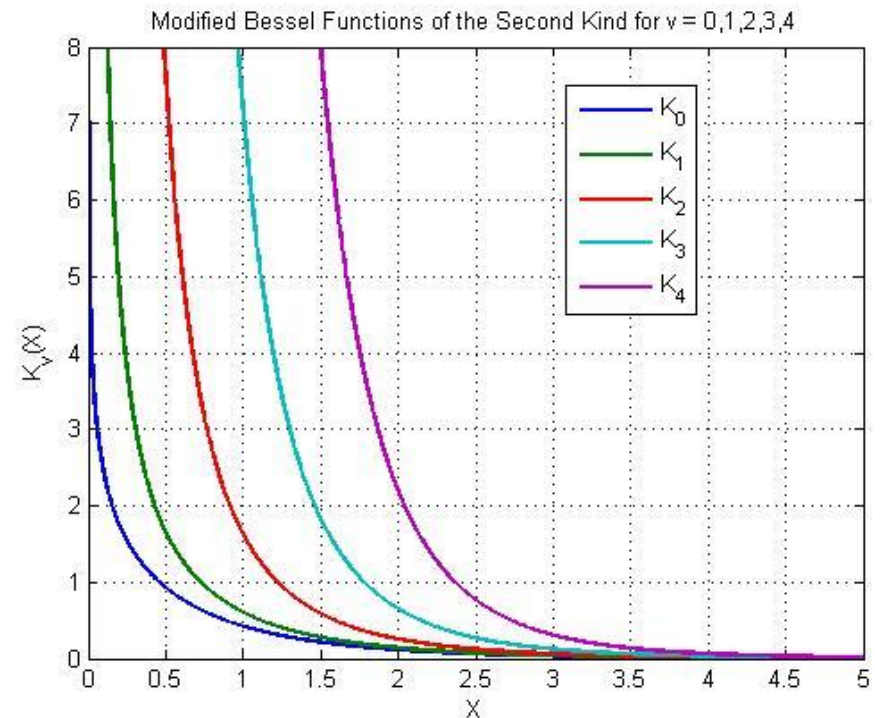
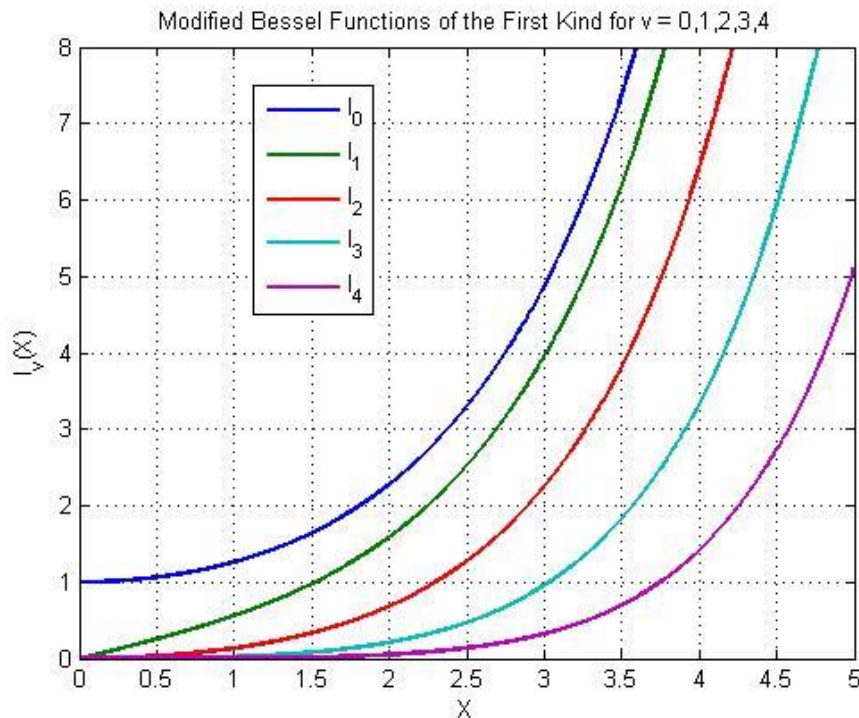


Funções de Bessel do tipo $I_n(x)$ e $K_n(x)$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \gamma^2) y = 0$$

$$y(x) = I_\gamma(x)$$

$$K_\gamma = \frac{\pi I_{-\gamma}(x) - I_\gamma(x)}{2 \sin(\gamma\pi)}$$



Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

Solução da equação de Helmholtz

$$E_z = \begin{cases} AJ_m(p\rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ CK_m(q\rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$$p^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2,$$

$$q^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2.$$

$$H_z = \begin{cases} BJ_l(p\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ DK_l(q\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

J_m, K_m : Funções de Bessel

As outras componentes dos campos elétrico e magnético são determinadas a partir das equações de Maxwell

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{i}{p^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_0 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= \frac{i}{p^2} \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\rho &= \frac{i}{p^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \varepsilon_0 n^2 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\ H_\phi &= \frac{i}{p^2} \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad \rho \leq a$$

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{-i}{q^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_0 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= \frac{i}{q^2} \left(\mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\ H_\rho &= \frac{i}{q^2} \left(\varepsilon_0 n^2 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\phi &= \frac{-i}{q^2} \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad \rho > a$$

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau**

Equação de dispersão para a constante de propagação β

a partir das condições de fronteira na interface núcleo/camada externa ($\rho = a$)

Continuidade dos campos tangenciais

Condições de Dirichlet

$$N_x(E_1 - E_2) = 0$$

$$N_x(H_1 - H_2) = 0$$

Continuidade dos campos normais

Condições de Neumann

$$N \cdot (D_1 - D_2) = 0$$

$$N \cdot (B_1 - B_2) = 0$$

N : vetor normal à interfase região 1/região 2

$$\left[\frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{K'_m(qa)}{qK_m(qa)} \right] \left[\frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{n_2^2 K'_m(qa)}{n_1^2 qK_m(qa)} \right] = \frac{m^2}{a^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \left(\frac{1}{p^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{q^2} \right)$$

J'_m e K'_m são as primeiras derivadas das funções de Bessel J_m , K_m respectivamente

A solução desta equação para β é numérica.

A existência de soluções de β para diferentes valores dos coeficientes: m e $l = 1, 2, 3, \dots$ dão origem aos diferentes modos de propagação: $\beta_{m,l}$

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

$\beta_{m,l}$: constante de propagação
 $m, l : 1, 2, 3, \dots$



Definem os diferentes modos de propagação

$$\bar{n}_{m,l} = \frac{\beta_{m,l}}{k_0} \quad \text{Índice de refração efetivo do modo } (m,l)$$

$n_2 < \bar{n}_{m,n} \leq n_1$: Condição necessária dos modos guiados

$\bar{n}_{m,n} \leq n_2$: Modos não guiados

- Nomenclatura dos modos**

$H_z, E_z \neq 0$  Modos híbridos  $HE_{m,l} \rightarrow H_z \text{ dominate}$
 $EH_{m,l} \rightarrow E_z \text{ dominate}$

$m = 0$  Modos transversais  $HE_{0,l} \rightarrow TE_{0,l} \text{ Modo de campo elétrico transversal}$
 $EH_{0,l} \rightarrow TM_{0,l} \text{ Modo de campo magnético transversal}$

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

Condição de corte dos modos guiados “cut off”

$$k_m(q\rho) = \left(\frac{\pi}{2q\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-q\rho)$$

Perfil do campo região da camada externa

$$q = 0 \text{ ou } \bar{n} = n_2$$

Limite para a condição de corte

Frequência normalizada: define a condição de corte e o número de modos guiados

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \approx (2\pi/\lambda) a n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

$$\text{Numero de modos} = V^2/2$$

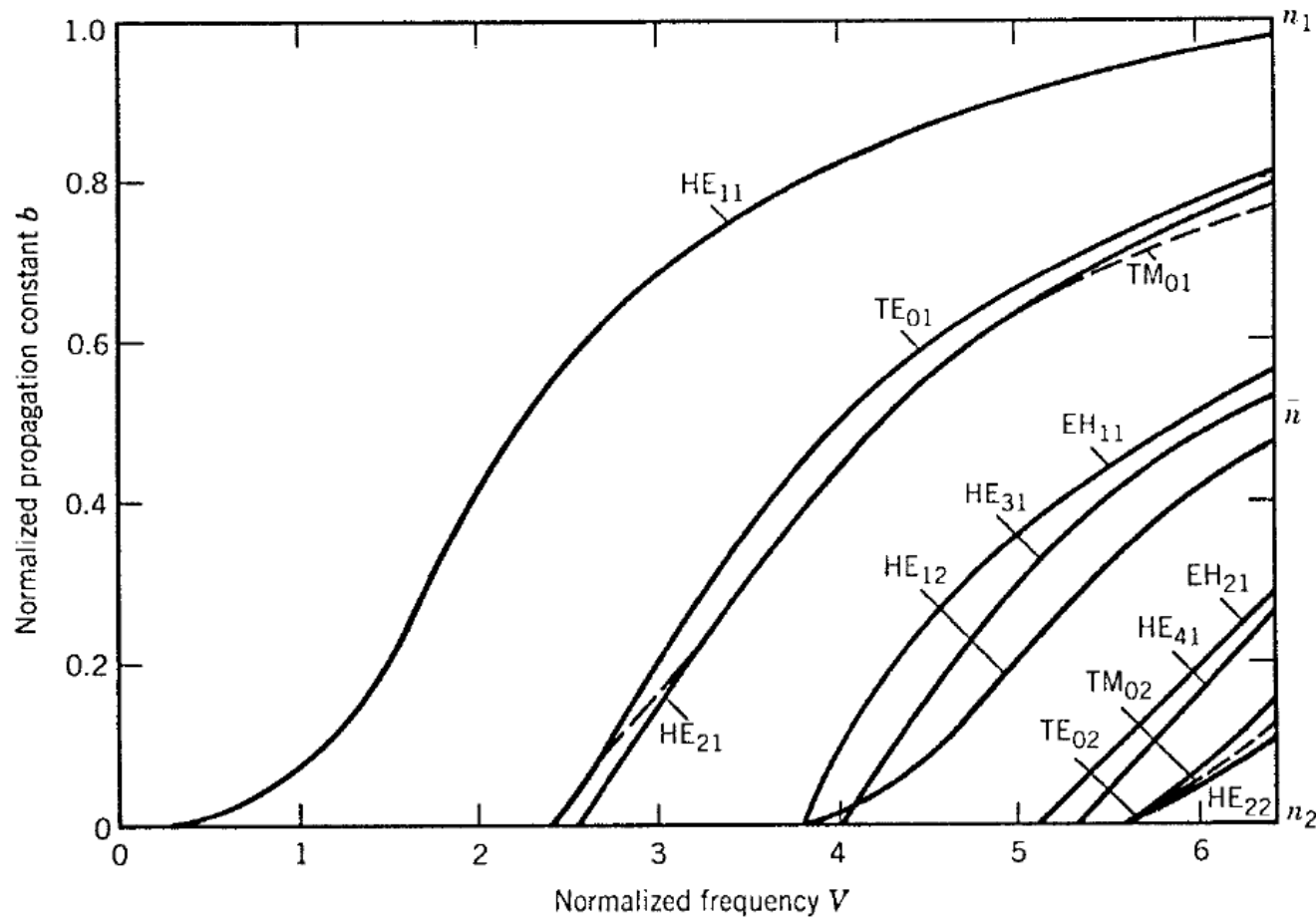
Constante de propagação normalizada

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} = \frac{\bar{n} - n_2}{n_1 - n_2}.$$

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau



Curva da constante de propagação normalizada “ b ” em função da frequência normalizada “ V ”

Fibras Ópticas

Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

A fibra óptica mono modo suporta somente o modo **HE₁₁** : **modo fundamental**

Regra de projeto para uma fibra mono -modo

Modos TE_{0,1} e TM_{0,1}
na condição de corte

m = 0

$$\begin{cases} pJ_0(pa)K'_0(qa) + qJ'_0(pa)K_0(qa) = 0, \\ pn_2^2 J_0(pa)K'_0(qa) + qn_1^2 J'_0(pa)K_0(qa) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 0 \\ pa = V \end{cases}$$

Fibras para telecomunicação
 $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, $a = 4 \mu\text{m}$

$$V = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) an_1 \sqrt{2\Delta} < 2,405$$

Perfil do campo da luz guiada na fibra mono-modo

- O modo HE_{11} é um modo linearmente polarizado conhecido também como modo LP_{01}
- Transformando os campos em coordenadas cartesianas (x,y,z) teremos:

$$E_x = E_\rho \cos\varphi - E_\varphi \sin\varphi$$

$$E_y = E_\rho \sin\varphi + E_\varphi \cos\varphi$$

$$E_z = \begin{cases} AJ_m(p\rho) \exp(im\varphi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ CK_m(q\rho) \exp(im\varphi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$$H_z = \begin{cases} BJ_m(p\rho) \exp(im\varphi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ DK_m(q\rho) \exp(im\varphi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{i}{p^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_0 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \\ E_\varphi &= \frac{i}{p^2} \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad \rho \leq a$$

- Sem perda de generalidade $E_y = 0$

$$E_x = E_0 \begin{cases} [J_0(p\rho)/J_0(pa)] \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ [K_0(q\rho)/K_0(qa)] \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z \approx 0$$

$$H_y = \bar{n} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} E_x$$

$$H_x = 0$$

$$H_z \approx 0$$



Modo linearmente polarizado

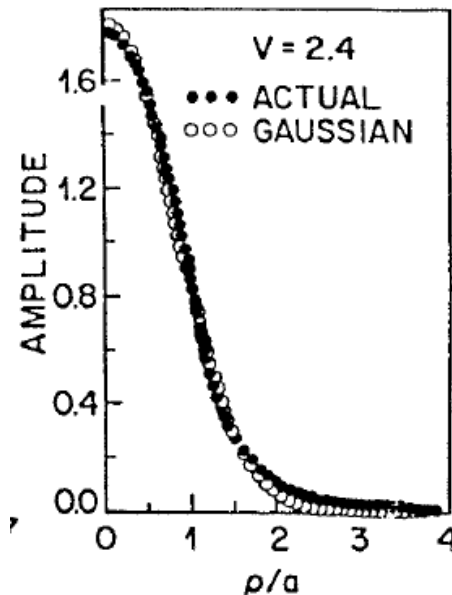
Tamanho do feixe na fibra óptica monomodo

Perfil do campo: Aproximação de função Gaussiana:

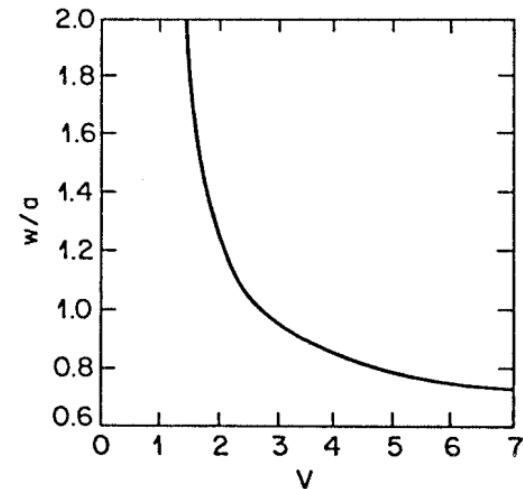
$$E_x = A \exp(-\rho^2/w^2) \exp(i\beta z),$$

Área efetiva do feixe

$$A_{\text{eff}} = \pi w^2,$$



Curva do tamanho normalizado do feixe em função da frequência normalizada



Expressão analítica para o tamanho do feixe

$$w/a \approx 0.65 + 1.619V^{-3/2} + 2.879V^{-6}.$$

Fator de confinamento

$$\Gamma = \frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}} = \frac{\int_0^a |E_x|^2 \rho d\rho}{\int_0^\infty |E_x|^2 \rho d\rho} = 1 - \exp\left(-\frac{2a^2}{w^2}\right).$$

$$V = 2 \overset{?}{\Rightarrow} \Gamma = 0,75$$

$$V = 1 \Rightarrow \Gamma = 0,2$$

Fibras para telecomunicação

$$2 < V < 2,4$$

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de velocidade de grupo : “GVD”

Velocidade de grupo:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n_g}$$

Índice de refração de grupo depende da frequência do sinal:

$$\bar{n}_g = \bar{n} + \omega(d\bar{n}/d\omega).$$



Alargamento do sinal pulsado

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta\omega = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta\omega = L\beta_2 \Delta\omega$$

$$\beta_2 = d^2\beta/d\omega^2 \quad : \text{Parâmetro GVD}$$

L: comprimento da fibra

$\Delta\omega$: Largura espectral do pulso

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de velocidade de grupo : “GVD”

Alargamento do sinal pulsado: $\Delta T = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\lambda = DL\Delta\lambda$

Parâmetro de dispersão: $D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$ [ps/Km-nm]

Efeito da dispersão na taxa de transmissão de bits

$$B\Delta T < 1; \quad BL|D|\Delta\lambda < 1$$

Fibra de sílica: $D = 1\text{ps/Km-nm}$

Laser de semicondutor: $\Delta\lambda = 2 - 4 \text{ nm}$



$$BL < 500 \text{ (Gb/s) - Km}$$

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de velocidade de grupo : “GVD”

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left(2 \frac{d\bar{n}}{d\omega} + \omega \frac{d^2\bar{n}}{d\omega^2} \right)$$

$$D = D_M + D_W,$$

Dispersão do material

Dispersão da onda guiada

$$D_M = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{dn_{2g}}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{dn_{2g}}{d\lambda}$$

$$D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \left[\frac{n_{2g}^2}{n_{2\omega}} \frac{V d^2(Vb)}{dV^2} + \frac{dn_{2g}}{d\omega} \frac{d(Vb)}{dV} \right]$$

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de velocidade de grupo : “GVD”

Dispersão do material

Índice de refração do material

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^M \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2},$$

Índice de refração de grupo

$$n_g = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$$

Dispersão do material

$$D_M = \frac{1}{c} \left(\frac{dn_g}{d\lambda} \right)$$

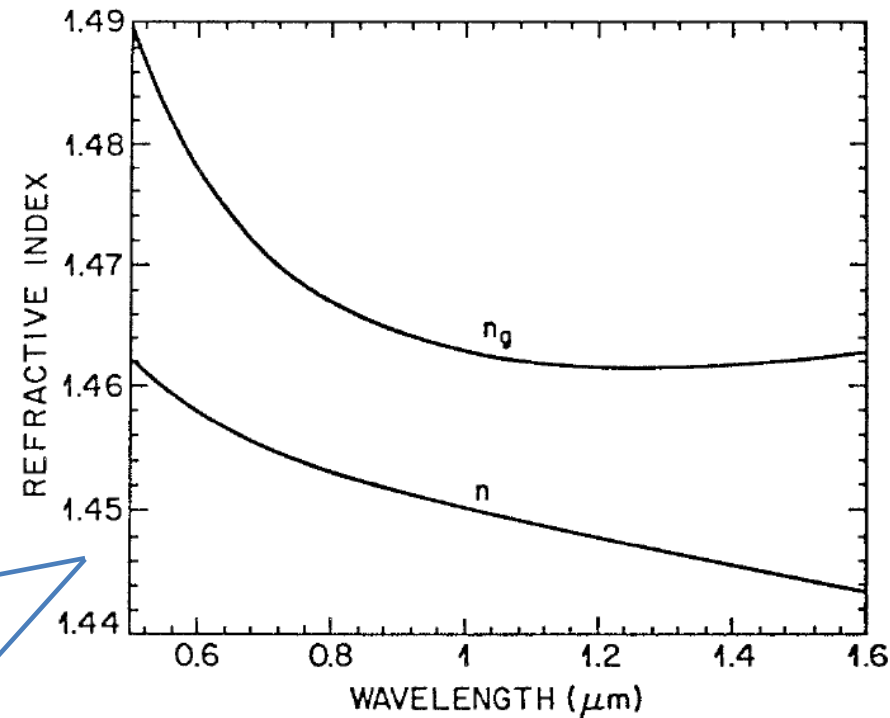
Dispersão do material obtida a partir das curvas da Figura

$$D_M = 122 \left(1 - \frac{\lambda_{ZD}}{\lambda} \right)$$

Comprimento de onda para dispersão zero

$$D_M(\lambda_{ZD}) = 0$$

$$\lambda_{ZD} = 1,276 \mu\text{m}$$



Variação do índice de refração “n” e índice de refração de grupo “n_g” em função do comprimento de onda da luz para a sílica (Fused silica)

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

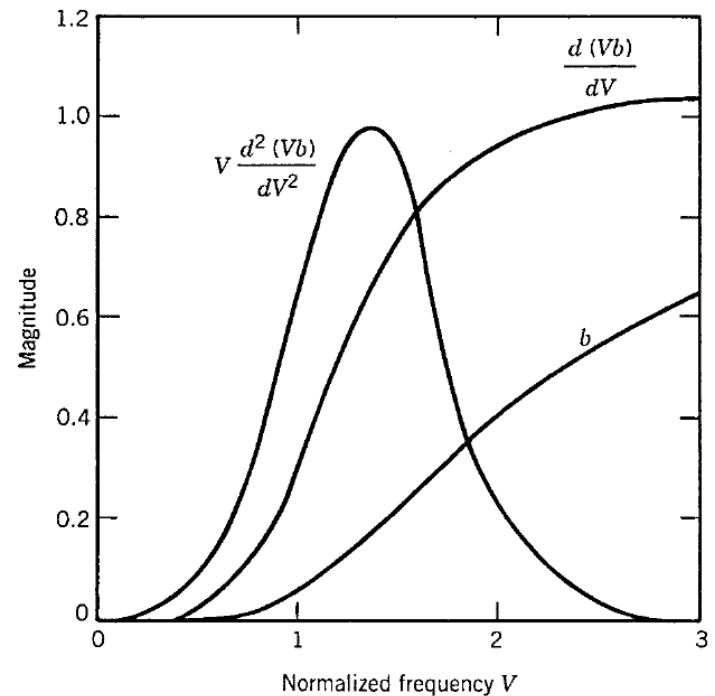
Dispersão de velocidade de grupo : “GVD”

Dispersão de onda guiada

$$D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \left[\frac{n_{2g}^2}{n_2\omega} \frac{V d^2(Vb)}{dV^2} + \frac{dn_{2g}}{d\omega} \frac{d(Vb)}{dV} \right].$$



$D_W < 0$ (negativo)

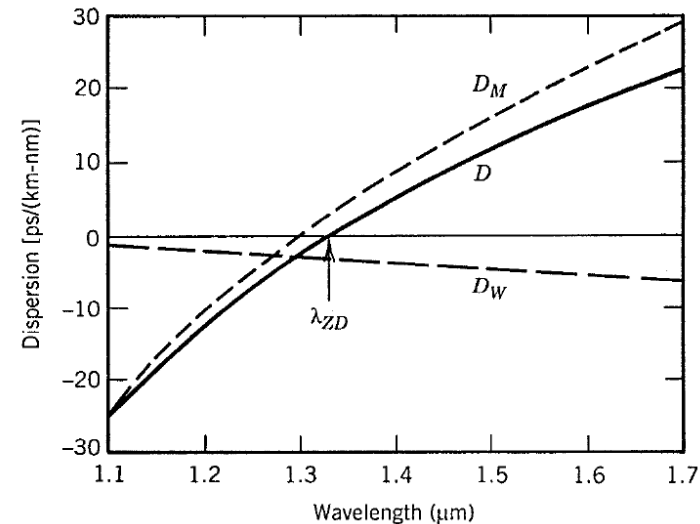


Curva valida no intervalo de comprimento de onda da luz compreendida entre 0 e 1,6 μm

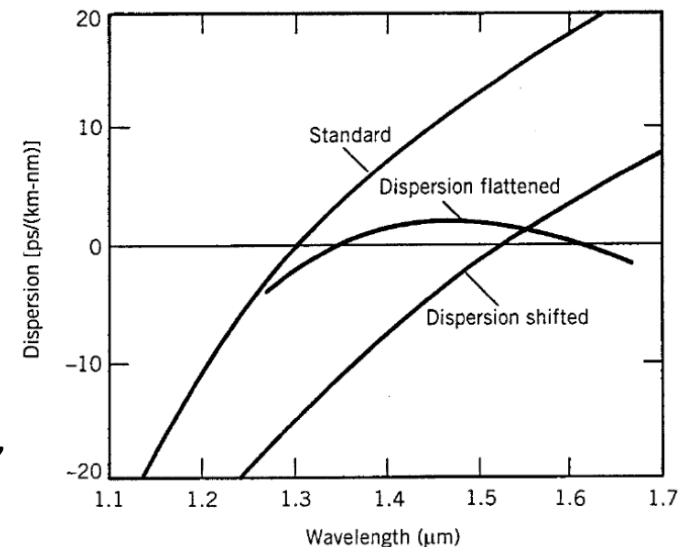
Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Comportamento da Dispersão Total (GVD)

- D_W desloca λ_{ZD} em 30 a 40 nm
- Valores típicos em 1,55 μm : $D = 15$ a 18 ps/(Km-nm)
- Faixa de operação dos sistemas de comunicação óptica: 1,3 – 1,6 μm ($D_W < 0$)
- $D_W = D_W(a, \Delta) \Rightarrow \lambda_{ZD}$ pode ser deslocado por exemplo para 1,55 μm : Fibra com deslocamento de dispersão
- Projeto de fibra com Δ pequeno na faixa de 1,3 a 1,6 $\mu\text{m} \Rightarrow$ Fibra com dispersão achatada.



Curvas da dispersão total, dispersão do material e dispersão de onda guiada respectivamente



Curvas típicas da dispersão total fibras ópticas padrões, com deslocamento de dispersão e com dispersão achatada respectivamente.

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de ordem superior

Processo de terceira ordem governados por:

$$S = dD/d\lambda$$



Dispersão diferencial:

$$S = (2\pi c/\lambda^2)^2 \beta_3 + (4\pi c/\lambda^3) \beta_2$$

Parâmetro de dispersão de terceira ordem: $\beta_3 = d\beta_2/d\omega \equiv d^3\beta/d\omega^3$

Limite do produto taxa de bits - distância "BL": $BL|S|(\Delta\lambda)^2 < 1$

Exemplo:

$\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$ (laser de semiconductor)
 $\lambda = 1,55 \text{ }\mu\text{m}$
 $S = 0.05 \text{ ps}/(\text{Km}\cdot\text{nm}^2)$



$BL = 5 \text{ (Tb/s)-Km}$

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

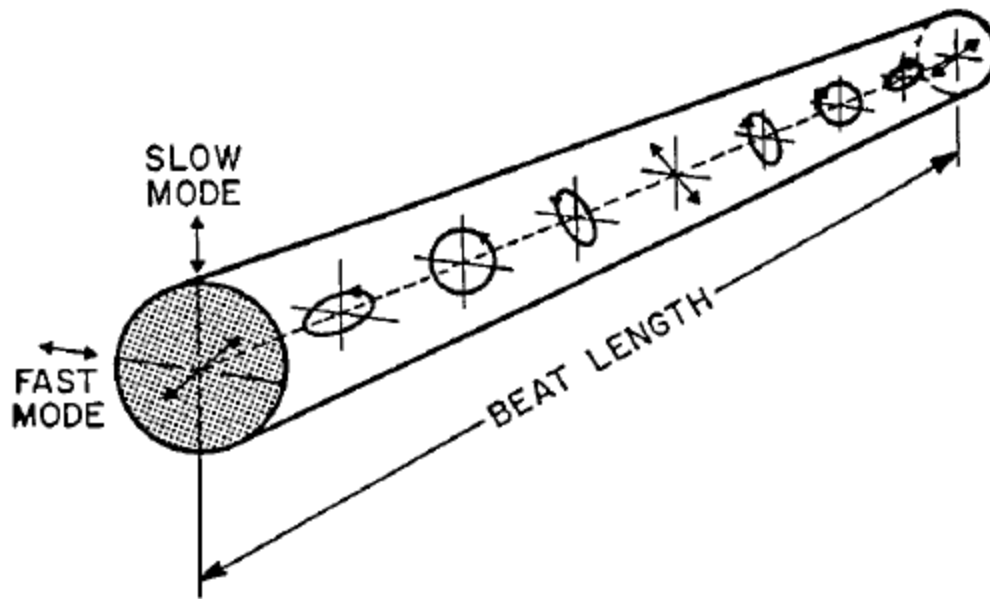
Características de algumas fibras ópticas comerciais

Fiber Type and Trade Name	A_{eff} (μm^2)	λ_{ZD} (nm)	D (C band) [ps/(km-nm)]	Slope S [ps/(km-nm ²)]
Corning SMF-28	80	1302–1322	16 to 19	0.090
Lucent AllWave	80	1300–1322	17 to 20	0.088
Alcatel ColorLock	80	1300–1320	16 to 19	0.090
Corning Vascade	101	1300–1310	18 to 20	0.060
Lucent TrueWave-RS	50	1470–1490	2.6 to 6	0.050
Corning LEAF	72	1490–1500	2 to 6	0.060
Lucent TrueWave-XL	72	1570–1580	−1.4 to −4.6	0.112
Alcatel TeraLight	65	1440–1450	5.5 to 10	0.058

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

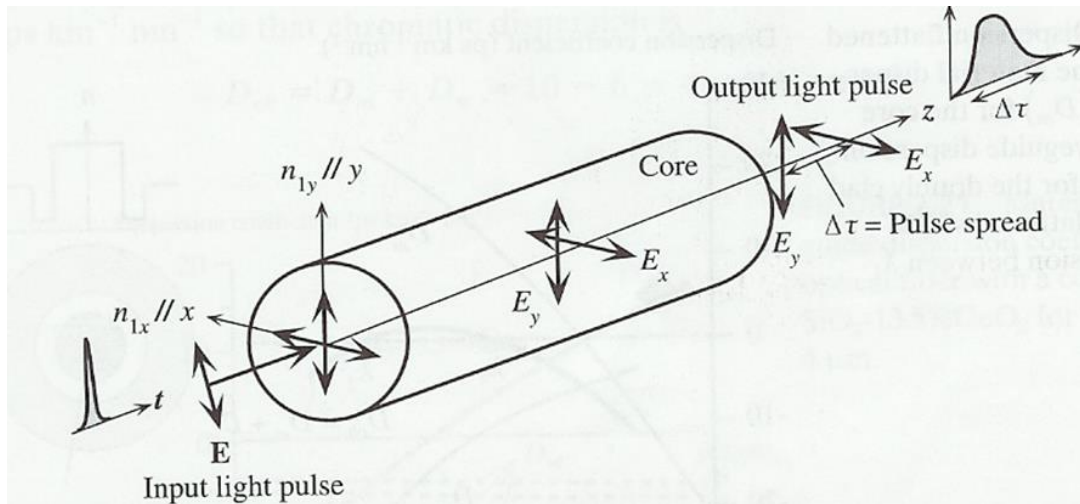
Efeito birrefringente

- Birrefringência: Índice de refração depende da direção promove batimento da intensidade do campo
- Grau da birrefringência modal: $B_m = |\bar{n}_x - \bar{n}_y|$,
- Período do comprimento do batimento: $L_B = \lambda / B_m$.



Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de modo-polarização: Efeito birrefringente



Dispersão birrefringente

$$\frac{\Delta\tau}{L} = \frac{B_m}{c}$$

Valores típicos

$$B_m = 10^{-7} \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{L} = 3,3[ps/Km]$$

Defeitos geométricos originam efeitos birrefringentes randômicos



Degradação do pulso: efeito de aumento da largura do pulso



Minimizar a degradação introduzindo birrefringência alta: $B_m = 10^{-4}$

Processos de Dispersão nas Fibras Ópticas

Dispersão de modo-polarização: Efeito birrefringente

- Fibras com birrefringência constante: Tempo de retardo

$$\Delta T = \left| \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} \right| = L|\beta_{1x} - \beta_{1y}| = L(\Delta\beta_1), \quad \Delta T/L \text{ ate } 1 \text{ ns/Km}$$

- Fibras ópticas com birrefringência randômica Induzem alargamento do pulso
- Modelagem: seções pequenas de fibra com birrefringência definida e randômica entre seções: (σ_T : alargamento do pulso)

$$\sigma_T^2 \equiv \langle (\Delta T)^2 \rangle \longrightarrow \sigma_T^2(z) = 2(\Delta\beta_1)^2 l_c^2 [\exp(-z/l_c) + z/l_c - 1]$$

l_c : Comprimento de correlação

$$z \ll l_c, \longrightarrow \sigma_T = (\Delta\beta_1)z \quad \text{Similar ao da fibra com birrefringência constante}$$

$$z \gg l_c, \longrightarrow \sigma_T \approx (\Delta\beta_1)\sqrt{2l_c L} \equiv D_p \sqrt{L},$$

D_p : Parâmetro de dispersão modo polarização (PMD)

$$D_p = 0.01 \text{ a } 10 \frac{ps}{\sqrt{Km}}$$

$$\text{Fibras modernas: } D_p < 0.1 \frac{ps}{\sqrt{Km}}$$

Limitações induzidas pela dispersão

Equações básicas de propagação: fibras mono-modo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mathbf{x}} F(x, y) \tilde{B}(0, \omega) \exp(i\beta z) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \tilde{B}(z, \omega) = \tilde{B}(0, \omega) \exp(i\beta z) \\ B(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \bar{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \approx \beta_0 + \beta_1(\Delta\omega) + \frac{\beta_2}{2}(\Delta\omega)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\Delta\omega)^3, \quad \text{Onde: } \begin{cases} \Delta\omega = \omega - \omega_0 \\ \beta_m = (d^m \beta / d\omega^m)_{\omega=\omega_0}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B(z, t) &= A(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]. \\ A(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \tilde{A}(0, \Delta\omega) \\ &\quad \times \exp \left[i\beta_1 z \Delta\omega + \frac{i}{2} \beta_2 z (\Delta\omega)^2 + \frac{i}{6} \beta_3 z (\Delta\omega)^3 - i(\Delta\omega) t \right] \end{aligned}$$

Equação básica de propagação

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} &= 0. \\ t' &= t - \beta_1 z \\ z' &= z, \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$\frac{\partial A}{\partial z'} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t'^3} = 0.$$

Limitações induzidas pela dispersão

Característica de um pulso com batimento

Amplitude de um pulso com batimento: $A(0,t) = A_0 \exp \left[-\frac{1+iC}{2} \left(\frac{t}{T_0} \right)^2 \right]$ batimento
 $\delta\omega(t) = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{C}{T_0^2}t,$



Transformada de Fourier: $\tilde{A}(0,\omega) = A_0 \left(\frac{2\pi T_0^2}{1+iC} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\omega^2 T_0^2}{2(1+iC)} \right]$



Largura média espectral:

$$\Delta\omega_0 = (1+C^2)^{1/2} T_0^{-1}$$

Conclusão: A largura do pulso é magnificado por um fator igual a $(1+C^2)^{1/2}$

Limitações induzidas pela dispersão

Propagação de pulsos com batimento (CHIRP)

Solução da equação de propagação: $A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp \left(\frac{i}{2} \beta_2 z \omega^2 + \frac{i}{6} \beta_3 z \omega^3 - i \omega t \right) d\omega$



Solução para $\beta_3 = 0$:

$$A(z, t) = \frac{A_0}{\sqrt{Q(z)}} \exp \left[-\frac{(1 + iC)t^2}{2T_0^2 Q(z)} \right]$$
$$Q(z) = 1 + (C - i)\beta_2 z / T_0^2.$$

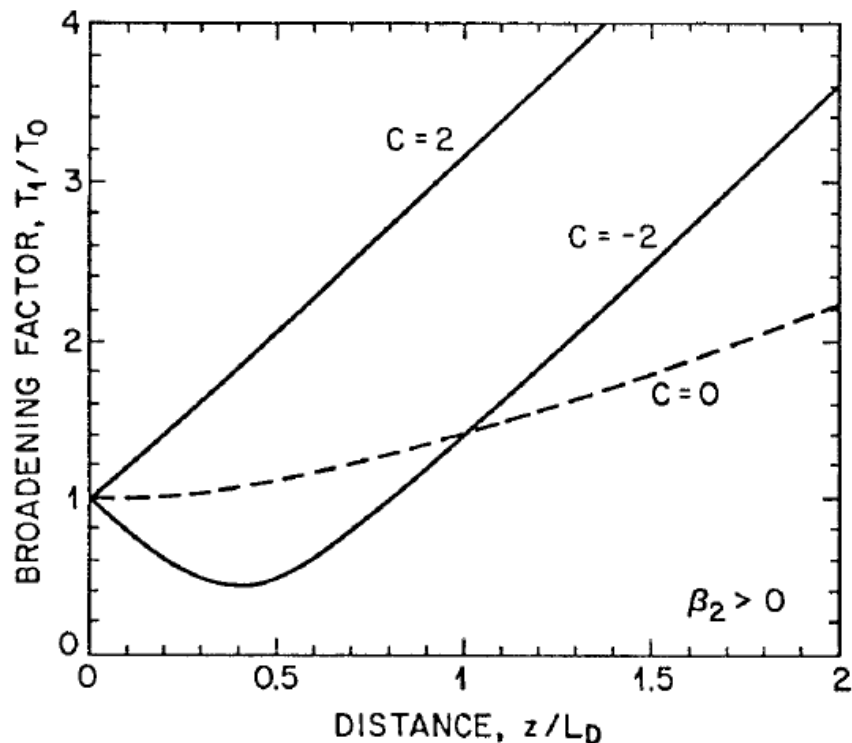
O batimento muda:

$$C_1(z) = C + (1 + C^2)\beta_2 z / T_0^2.$$

Conclusão: O pulso Gaussiano permanece Gaussiano durante a propagação, a largura e amplitude do pulso mudam segundo $Q(z)$.

Limitações induzidas pela dispersão

Propagação de pulsos com batimento (CHIRP)



Fator de alargamento do pulso:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[\left(1 + \frac{C\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Comprimento de dispersão $L_D = T_0^2/|\beta_2|$

Para: $\beta_2 C < 0$,

$$z_{\min} = [|C|/(1+C^2)] L_D$$

$$T_1^{\min} = T_0/(1+C^2)^{1/2}$$

Expressão geral do alargamento do pulso para uma fibra monomodo de comprimento igual a L :

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \left(1 + \frac{C\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2 + (1 + V_\omega^2) \left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2 + (1 + C^2 + V_\omega^2)^2 \left(\frac{\beta_3 L}{4\sqrt{2}\sigma_0^3} \right)^2 \quad V_\omega = 2\sigma_\omega\sigma_0.$$

Limitações induzidas pela dispersão

Propagação de pulsos com batimento (CHIRP)

Limitação na taxa de dados “B”

Fonte com largura espectral grande:

$$V_\omega \gg 1 \text{ e}$$

Para o sistema operado em $\lambda \neq \lambda_{\text{ZD}}$

Então podemos considera $\beta_3 \approx 0, C = 0$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + (\beta_2 L \sigma_\omega)^2 \equiv \sigma_0^2 + (DL\sigma_\lambda)^2$$

$$\sigma = (\sigma_0^2 + \sigma_D^2)^{1/2}$$

$$BL|D|\sigma_\lambda \leq \frac{1}{4}$$

Para o sistema operado em $\lambda = \lambda_{\text{ZD}}$

Então podemos considera $\beta_3 \neq 0$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{1}{2}(\beta_3 L \sigma_\omega^2)^2 \equiv \sigma_0^2 + \frac{1}{2}(SL\sigma_\lambda^2)^2$$

$$BL|S|\sigma_\lambda^2 \leq 1/\sqrt{8}.$$

Fonte com largura espectral estreita:

$$V_\omega \ll 1$$

Para o sistema operado em $\lambda \neq \lambda_{\text{ZD}}$

Então podemos considera $\beta_3 \approx 0, C = 0$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + (\beta_2 L / 2 \sigma_0)^2 \equiv \sigma_0^2 + \sigma_D^2.$$

$$B\sqrt{|\beta_2|L} \leq \frac{1}{4}.$$

Para o sistema operado em $\lambda = \lambda_{\text{ZD}}$

Então podemos considera $\beta_3 \neq 0$

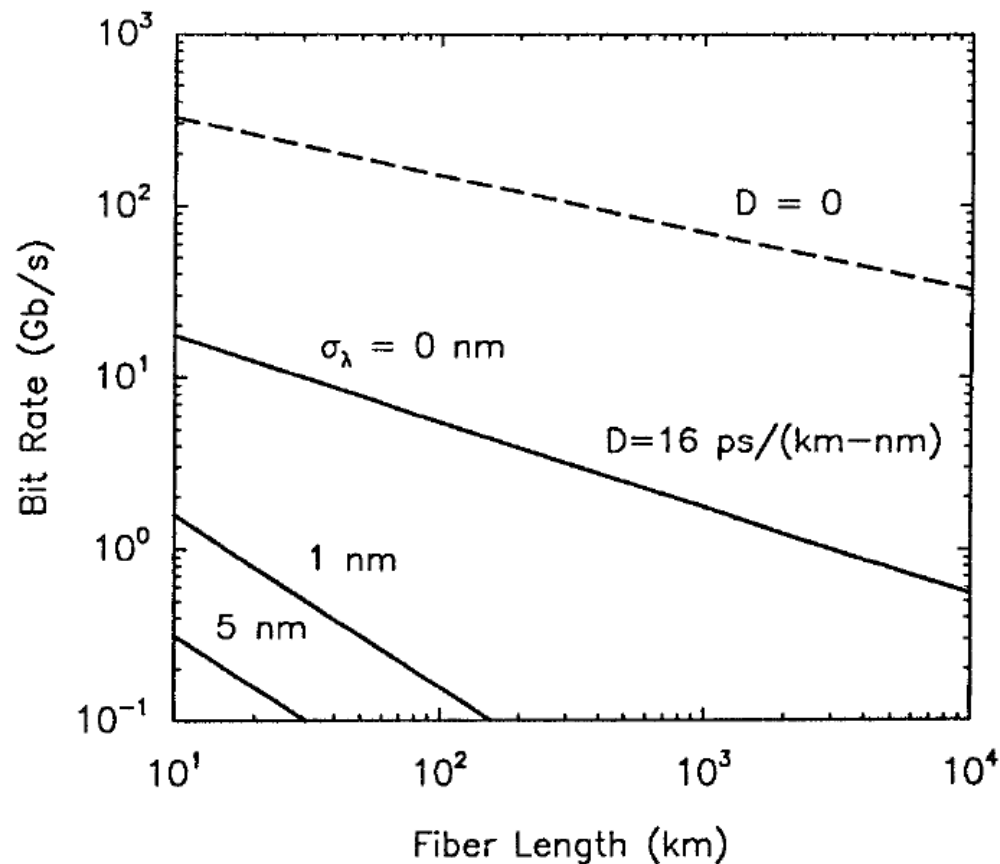
$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + (\beta_3 L / 4 \sigma_0^2)^2 / 2 \equiv \sigma_0^2 + \sigma_D^2.$$

$$B(|\beta_3|L)^{1/3} \leq 0.324.$$

Limitações induzidas pela dispersão

Propagação de pulsos com batimento (CHIRP)

Limitação na taxa de dados “B”



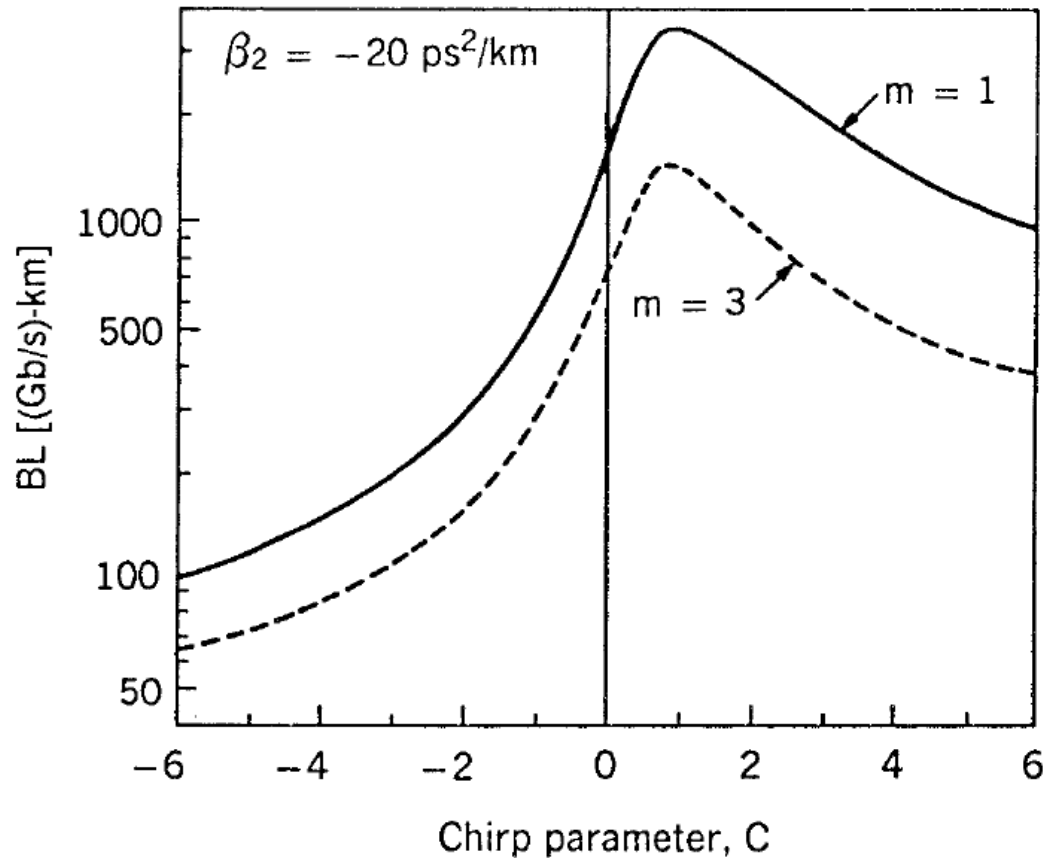
Curvas características da taxa de bits em função do comprimento da fibra para diferente larguras espectrais da fonte

Limitações induzidas pela dispersão

Propagação de pulsos com batimento (CHIRP)

Limitação na taxa de dados “B”: efeito da frequência de batimento

$$A(0, T) = A_0 \exp \left[-\frac{1 + iC}{2} \left(\frac{t}{T_0} \right)^{2m} \right]$$



Largura de Banda das Fibras Ópticas

Resposta de um sistema linear: $P_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')P_{\text{in}}(t')dt'$



Resposta para uma função de entrada impulso $\delta(t)$: $P_{\text{out}}(t) = h(t)$



Função de transferência espectral: $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt$, (Filtro passa banda)

Largura da Banda da fibra óptica: $f_{3\text{dB}}$ $\Rightarrow |H(f_{3\text{dB}})/H(0)| = \frac{1}{2}$

Função de transferência para um espectro Gaussiano ($h(t)$ Gaussiano):

$$H(f) = \left(1 + \frac{if}{f_2}\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(f/f_1)^2}{2(1 + if/f_2)}\right]$$

$$f_1 = (2\pi\beta_2 L \sigma_\omega)^{-1} = (2\pi|D|L\sigma_\lambda)^{-1},$$

$$f_2 = (2\pi\beta_3 L \sigma_\omega^2)^{-1} = [2\pi(S + 2|D|/\lambda)L\sigma_\lambda^2]^{-1}$$

Para Sistemas com $\lambda \neq \lambda_{\text{zD}} \Rightarrow f_1 \ll f_2$

$$f_{3\text{dB}} = (2 \ln 2)^{1/2} f_1 \approx 0.188(|D|L\sigma_\lambda)^{-1}$$

Para Sistemas com $\lambda = \lambda_{\text{zD}} \Rightarrow f_1 \rightarrow \infty$

$$f_{3\text{dB}} = \sqrt{15} f_2 \approx 0.616(SL\sigma_\lambda^2)^{-1}$$

Perdas nas Fibras Ópticas

Lei de Beer: $dP/dz = -\alpha P$, $\Rightarrow$ $P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \exp(-\alpha L)$

Potência na saída da fibra

Potência na entrada da fibra

Coeficiente de atenuação: $\alpha \text{ (dB/km)} = -\frac{10}{L} \log_{10} \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right) \approx 4.343 \alpha$

Coeficiente de atenuação para a sílica em $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$: $\alpha = 0,16 \text{ dB/Km}$

Contribuições dominantes para o coeficiente de atenuação:

- Espalhamento Rayleigh
- Imperfeições geométricas da fibra óptica
- Absorção do material

Espalhamento Rayleigh

Flutuações randômicas do índice de refração:

$$\alpha_R = c/\lambda^4$$

$$c = 0,7 \text{ a } 0,9 \text{ (dB/Km)} \cdot \mu\text{m}^4$$

$$\alpha_R = 0,12 \text{ a } 0,16 \text{ dB/Km}$$

Para $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$

Imperfeições Geométricas

Variação de forma (núcleo/cda externa): Espalhamento Mie

Para 1% de variação: $\alpha < 0.03 \text{ dB/Km}$

Deformação de curvatura

$$\alpha \sim \exp(-R/R_c)$$

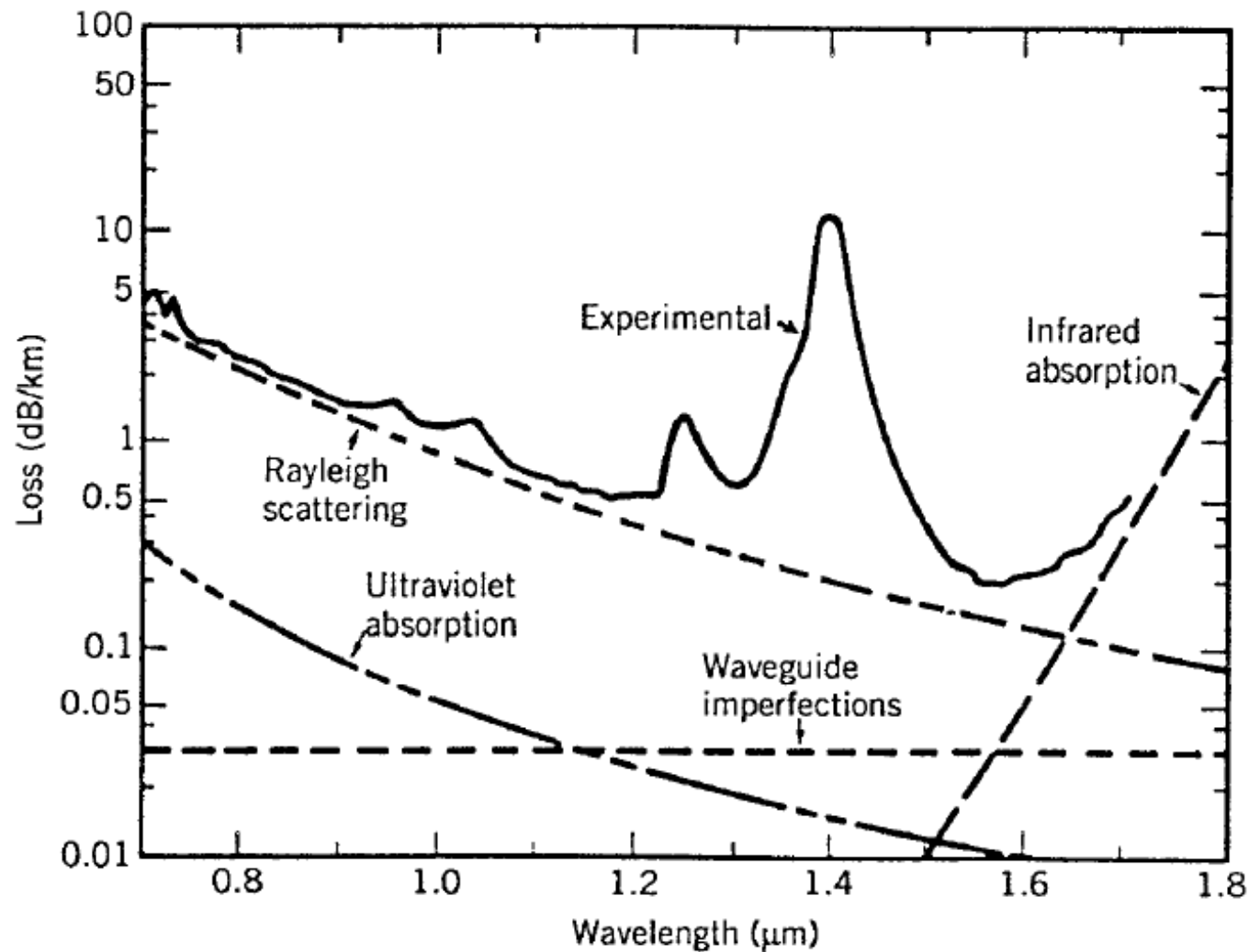
$$\left\{ \begin{array}{l} R: \text{Raio de curvatura} \\ R_c = a/(n_1^2 - n_2^2) \end{array} \right.$$

Fibra monomodo

$$R_c = 0,2 - 0,4 \mu\text{m}, R = 5 \text{ mm}$$

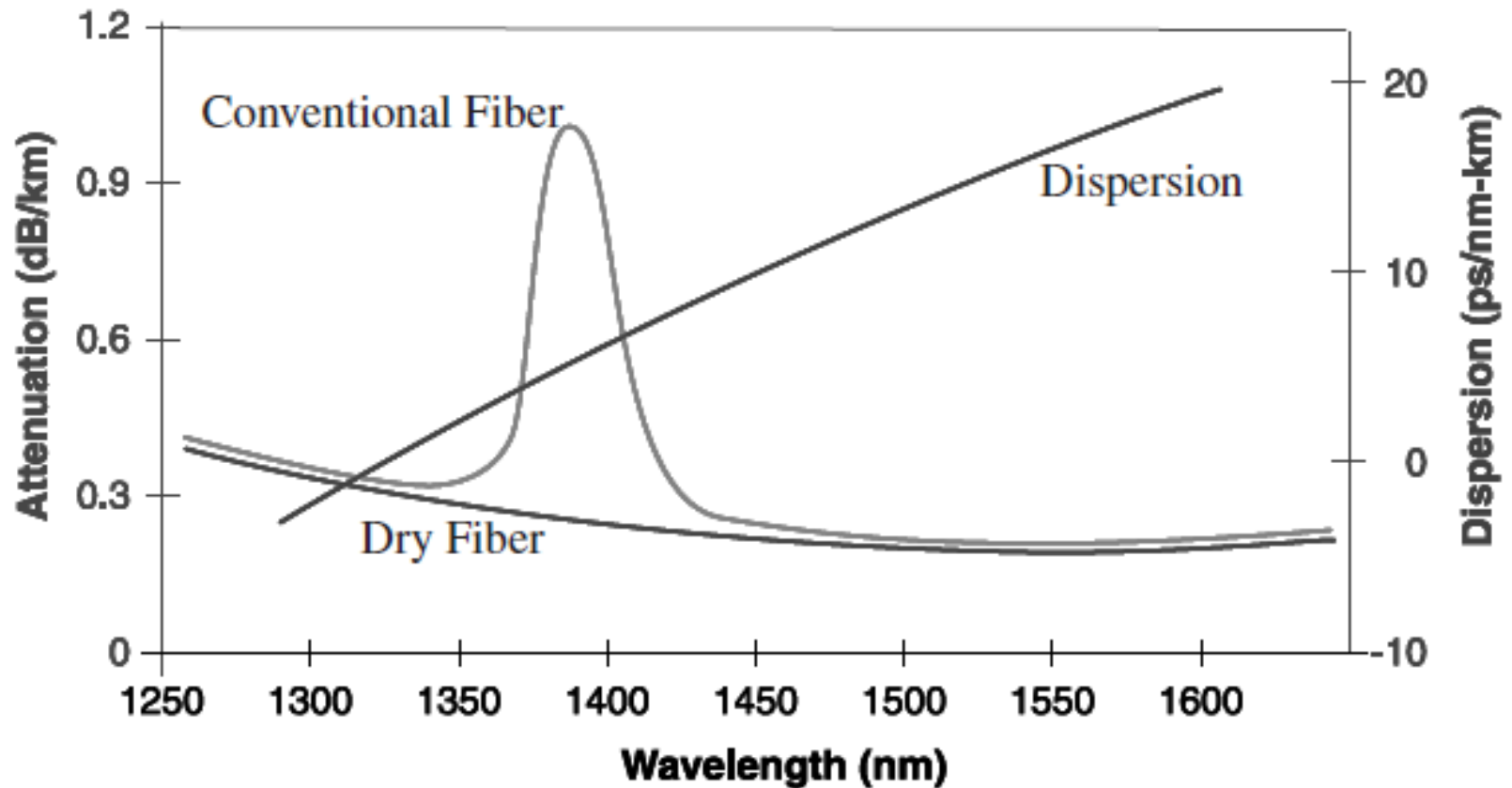
$$\alpha < 0,01 \text{ dB/Km}$$

Perdas nas Fibras Ópticas



Curvas espectrais típicas da perdas em uma fibra óptica monomodo

Curvas espectrais de atenuação e dispersão para a fibra monomodo convencional e fibra seca respectivamente



EFEITOS NÃO LINEARES NAS FIBRAS ÓPTICAS

Espalhamento estimulado da luz

- **Espalhamento inelástico**

Espalhamento Brillouin: Relacionado ao fônons acústicos.

Espalhamento Raman: Relacionado a fônons ópticos.

- **Perda de potência do sinal por efeito do espalhamento**

Baixa secção transversal

Perdas negligenciáveis em potências de excitação baixa

- **Em potencias elevadas**

Espalhamento de Raman estimulado (SRS)

Espalhamento Brillouin estimulado (SBS)

Perdas importantes de Potência

- **Efeitos e características dos espalhamentos inelásticos**

Mudança de frequência (energia) do sinal

SBS: 10 GHz

SRS: 13 THz

SBS: Acontece na direção de retro espalhamento (largura de banda de 100 MHz)

SRS: Acontece em ambas direções (largura de banda de 20-30 THz)

EFEITOS NÃO LINEARES NAS FIBRAS ÓPTICAS

Espalhamento Brillouin

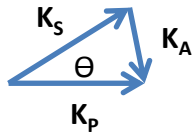
Conservação de energia:

$$\Omega = \omega_P - \omega_S$$

Diagram illustrating the energy conservation equation $\Omega = \omega_P - \omega_S$. Arrows point from the terms to their definitions:

- ω_P : Frequência do fônon acústico
- ω_S : Frequência da onda de excitação
- Ω : Frequência da onda espalhada

Conservação de vetor de onda:



$$K_A = K_P - K_S$$
$$\Omega = |k_A|v_A = 2v_A|k_P|\sin(\theta/2)$$

$\theta = 0 \rightarrow$ Não existe espalhamento
 $\theta = \pi \rightarrow$ Existe retro espalhamento

Fibra de sílica:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1,45 \\ v_A = 5,9 \text{ Km/s} \\ \text{Em } \lambda = 1,55 \text{ } \mu\text{m} \end{array} \right.$$



$$\frac{\Omega_A}{2\pi} = \gamma_B = 11,1 \text{ GHz}$$

EFEITOS NÃO LINEARES NAS FIBRAS ÓPTICAS

Espalhamento Estimulado Brillouin (SBS)

- Onda de excitação intensa na fibra origina onda acústica intensa
- Onda acústica intensa intensifica a intensidade de onda espalhada

Taxa de variação da intensidade de excitação: $\frac{dI_p}{dz} = -g_B I_p I_s - \alpha_p I_p$

Taxa de variação da intensidade de espalhamento: $-\frac{dI_s}{dz} = +g_B I_p I_s - \alpha_s I_s$

I_p : intensidade da excitação
 I_s : intensidade da excitação
 g_B : ganho de I_s

Forma espectral do ganho: $g_B(\Omega) = \frac{g_B(\Omega_B)}{1 + (\Omega - \Omega_B)^2 T_B^2}$

Tempo de vida da onda acústica $\leftarrow$

Para a fibra de sílica
 $G_B(\Omega_B) = 5 \times 10^{-11}$
 $\Delta \nu_B = 50 \text{ MHz}$
 Em $\lambda_p = 1,55 \mu\text{m}$

$I_s > \text{ sinal de ruído} \Rightarrow$ Potência limiar de excitação: $P_{th} = I_p A_{eff}$

$$g_B P_{th} L_{eff} / A_{eff} \approx 21$$

$$L_{eff} = 1/\alpha$$

$$A_{eff} = \pi w^2$$

Para a fibra de sílica

Onda de excitação contínua (CW)

$$\alpha < 0,2 \text{ dB/Km}$$

Em $\lambda_p = 1,55 \mu\text{m}$

$$\Rightarrow P_{th} = 4 \text{ mW}$$

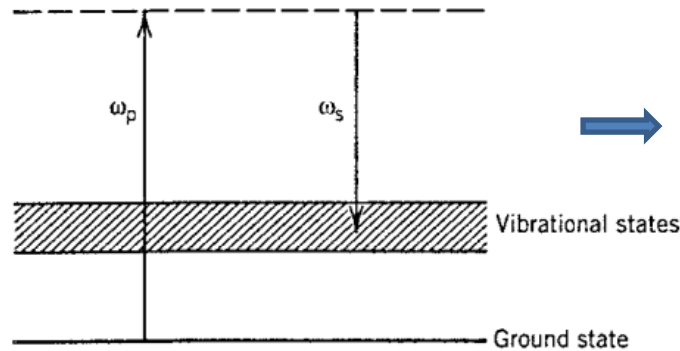
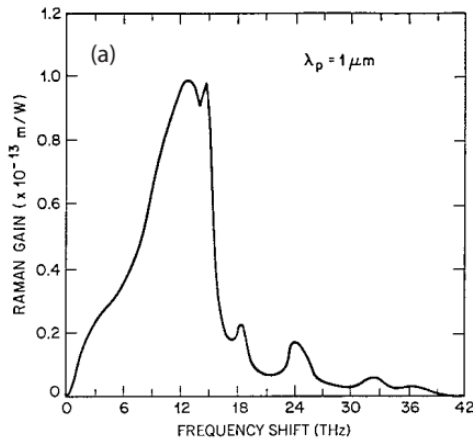
A potência limiar depende
do formato de modulação

$\Rightarrow$ RZ: 10 mW

NZR: 5 mW

EFEITOS NÃO LINEARES NAS FIBRAS ÓPTICAS

Espalhamento Estimulado Raman (SRS)



Na fibra larga de banda
 $\Delta\nu_R = 10 \text{ THz}$
 Deslocamento Raman
 $\Omega_B = \omega_p - \omega_s = 13 \text{ THz}$

Mecanismo mecânico-quântico do
 espalhamento Raman

Equações das taxas de mudança intensidade
 da onda de excitação e espalhada

$$\begin{cases} \frac{dI_p}{dz} = -g_R I_p I_s - \alpha_p I_p \\ \frac{dI_s}{dz} = g_R I_p I_s - \alpha_s I_s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_R P_{th} L_{eff} / A_{eff} &\approx 16 \\ g_R &\approx 6 \times 10^{-13} \text{ m/W} \\ L_{eff} &= 1/\alpha \\ A_{eff} &= \pi w^2 \end{aligned}$$

Para a fibra de sílica
 Onda de excitação contínua (CW)
 $\alpha < 0,2 \text{ dB/Km}$
 Em $\lambda_p = 1,55 \mu\text{m}$

$$P_{th} = 268 \text{ mW}$$

MODULAÇÃO DE FASE NÃO LINEAR

Auto modulação de fase

Modulação do índice de refração:

$$n'_j = n_j + \bar{n}_2(P/A_{\text{eff}})$$

$$\bar{n}_2 = 2.6 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$$

J= 1,2

Modulação da constante de propagação: $\beta' = \beta + k_0 \bar{n}_2 P / A_{\text{eff}} \equiv \beta + \gamma P$

Mudança não linear de fase:

$$\phi_{\text{NL}} = \int_0^L (\beta' - \beta) dz = \int_0^L \gamma P(z) dz = \gamma P_{\text{in}} L_{\text{eff}}$$

$$P(z) = P_{\text{in}} \exp(-\alpha z)$$

Existência de batimento se $\delta\omega = -\frac{d\varphi}{dt} \sim \frac{dP_{\text{in}}}{dt} \Rightarrow$ Alargamento do pulso

Desejado $\Phi_{\text{NL}} \ll 1$



$P_{\text{in}} = 1 \text{ mW}$