PSI.3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

2ª Prova Semestral – 18/10/17

GABARITO

1ª Questão: **(4,0 pontos)**

O circuito da Figura 1 será usado nos itens **a)** e **b)** desta questão.

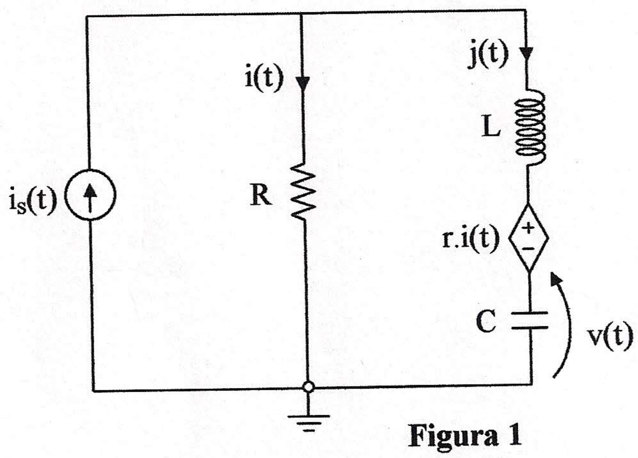


Figura 1

(1,5) **a)** Determine v(t) para $t \geq 0$. Considere apenas para este item os seguintes valores numéricos: $R = 3\Omega$, $r = 1\Omega$, $L = 2H$, $C = 1/2\ F$, $v(0_-) = 2V$, $j(0_-) = 0$, $i_s(t) = 2H(t)$ (A,s)

(1,3) **b)** Determine as condições para que o circuito livre seja assintoticamente estável e para qu ele seja marginalmente estável.

(1,2) **c)** Determine se o circuito da Figura 2 é BIBO estável. Se for BIBO estável, justifique porque e, se for instável, apresente uma excitação limitada em amplitude que causa uma resposta v(t) de amplitude crescente sem limite finito. Há algum valor de elemento do circuito que o tornaria BIBO instável para alguma entrada de amplitude limitada?

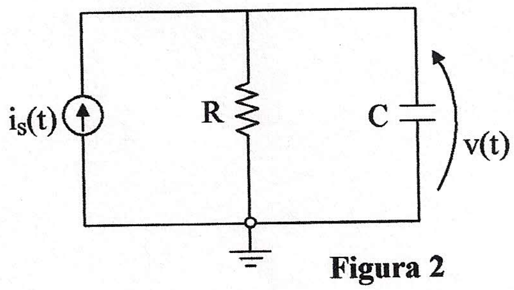


Figura 2

Gabarito

1) a) Relação constitutiva do capacitor:

$$J(s) = sCV(s) - Cv(0_-)$$

2ª Lei de Kirchhoff com relações constitutivas de R e L:

$$sLJ(s) - Lj(0_-) = RI(s) - rI(s) - V(s)$$

1ª Lei de Kirchhoff no nó superior:

$$I(s) = I_s(s) - J(s)$$

Juntando essas 3 equações, obtemos o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sC & -1 \\ 1 & (R-r)+sL \end{bmatrix}}_{T(s)} \begin{bmatrix} V(s) \\ J(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv(0_-) \\ Lj(0_-) + (R-r)I_s(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(T(s)) = s^2LC + s(R-r)C + 1 = LC\left(s^2 + \frac{(R-r)}{L}s + \frac{1}{LC}\right)$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos

$$\begin{bmatrix} s/2 & -1 \\ 1 & 2s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ J(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/s \end{bmatrix}$$

$$\det(T(s)) = s^2 + s + 1$$

$$V(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4/s & 2s+2 \end{vmatrix}}{s^2+s+1} = \frac{2s+2+\frac{4}{s}}{s^2+s+1} = \frac{2s^2+2s+4}{s(s^2+s+1)}$$

Expandindo $V(s)$ em frações parciais, obtemos

$$V(s) = \frac{A}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{A^*}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{B}{s}$$

$$B = \left[\frac{2s^2+2s+4}{s^2+s+1}\right]\Bigg|_{s=0} \longrightarrow B = 4$$

$$A = \left[\frac{2s^2+2s+4}{s\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right]\Bigg|_{s=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \longrightarrow A = -1 + j\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1{,}1547 \angle 150°$$

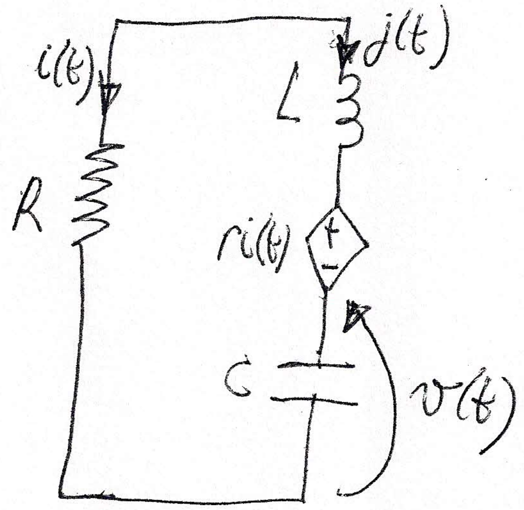
cuja antitransformada de Laplace é

$$v(t) = 4\,H(t) + 1{,}1547\,e^{-t/2}\,e^{j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 150^\circ\right)}H(t)$$
$$+\,1{,}1547\,e^{-t/2}\,e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 150^\circ\right)}H(t)$$

ou

$$\boxed{v(t) = 4\,H(t) + 2{,}3094\,e^{-t/2}\cos(0{,}8660\,t + 150^\circ)H(t)\ \ (V,s)}$$

b) Consideremos a resposta do circuito livre.



A expressão da 2ª Lei de Kirchhoff na malha, produz

$$-RI(s) + sLJ(s) - Lj_0 + V(s) + rI(s) = 0$$

A expressão da 1ª Lei de Kirchhoff no nó superior é

$$I(s) = -J(s),$$

que, substituída na expressão da 2ª Lei, a torna

$$(R-r)J(s) + sLJ(s) + V(s) = Lj_0$$

Acrescentamos a relação constitutiva do capacitor

$$J(s) - sCV(s) = Cv_0$$

para montar o sistema de equações

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R-r+sL & 1 \\ 1 & -sC \end{bmatrix}}_{T(s)} \begin{bmatrix} J(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lj_0 \\ Cv_0 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\det(T(s)) = 0$$

$$LCs^2 + (R-r)Cs + 1 = 0$$

que deve ter raízes com parte real não positiva para estabilidade assintótica isto é

i) estabilidade assintótica: $(R-r)C > 0 \rightarrow \boxed{r < R}$

ii) estabilidade marginalmente assintótica: $(R-r)C = 0 \rightarrow \boxed{r = R}$

c) A equação de análise nodal do circuito é

$$(G+sC)V(s) = I_s(s)$$

ou

$$V(s) = \frac{I_s(s)}{G+sC}$$

Se forem $G>0$ e $C>0$, a resposta conterá uma exponencial decadente, que poderá ser inicialmente amplificada por um fator t se a excitação $I_s(s)$ tiver o mesmo polo $-G/C$. Se o sinal de excitação for senoidal, aparecerá uma resposta senoidal adicional. Se o sinal de excitação for periódica, poderá ser decomposto em soma de senais senoidais com correspondentes termos limitados em amplitude na resposta.

Um comportamento instável pode aparecer quando $G=0$ e $I_s(s) = \frac{A}{s}$, quando a resposta tem transformada

$$V(s) = \frac{A}{s^2 C},$$

que, antitransformada, fica

$$v(t) = \frac{A}{C} t H(t),$$

portanto, sem limite finito.

Atenção: Preencher a folha ótica com seu nome, nº USP e opções escolhidas para cada teste.

Considere o circuito da Figura 3 para os **testes de 1 a 3 em unidades S.I.**

1 – Para que o circuito apresente uma frequência complexa própria nula, o valor de r deve ser tal que:

a) $r \in [-1,\ 1]$

b) $r = 0$

c) $r = 0$ ou $r = 1$

d) $r = -\dfrac{2}{3}$

e) Não é possível obter-se FCP nula.

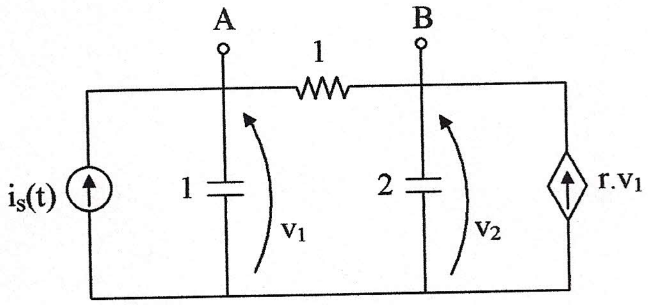


Figura 3

$v_1(0_-) = 1$
$v_2(0_-) = 0$

2 – Qual é a tensão V_{AB} do gerador de Thévenin visto entre A e B com $r = -4$.

a) $(I_s+1)\dfrac{2s+4}{2s^2+3s+4}$

b) $(I_s+1)\dfrac{2s}{2s^2+3s+4}$

c) $I_s\dfrac{2s+8}{2s^2+3s+4}$

d) $(I_s+2)\dfrac{2s}{2s^2+s+4}$

e) $(I_s-1)\dfrac{2s+4}{2s^2+3s+4}$

3 – Para este item, suponha que o resistor foi retirado da rede. Quanto vale a impedância $Z_0(s)$ de Thévenin visto entre A e B nestas condições?

a) $\dfrac{2s-r}{s}$

b) $\dfrac{s+r}{s^2}$

c) $\dfrac{2s+r}{s}$

d) $\dfrac{2s+2r}{s^3}$

e) $\dfrac{3s-r}{2s^2}$

4 – Assinale a opção **verdadeira**:

a) Em um bipolo em convenção do receptor a corrente instantânea de A para B é positiva apenas se a tensão de A para B também for positiva.

b) Para determinar todas as FCPs de um circuito basta usar o denominador de uma função de rede escolhida.

c) A superposição em Laplace com 2 geradores independentes e 2 elementos armazenadores de energia pode ser feita com 1 gerador e 1 condição inicial por vez, ou seja, com 2 circuitos (sem repetir o mesmo gerador ou a mesma c.i.).

d) Podemos aplicar o Teorema de Thévenin a uma rede onde a tensão de um elemento não linear controle a corrente de um elemento linear.

e) Uma FCP dupla deve aparecer em toda resposta livre com o grau 1 ou 2.

(1)

e_A: $sE_A - v_{10} + E_A - E_B - I_s = 0 \Rightarrow (s+1)E_A - E_B = I_s + v_{10}$

e_B: $E_B - E_A + s2E_B - 2v_{20} - r\underbrace{V_1}_{E_A} = 0 \Rightarrow E_A(-1-r) + (2s+1)E_B = 2v_{20}$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1-r & 2s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s + v_{10} \\ 2v_{20} \end{bmatrix}$$

$\det = (s+1)(2s+1) - (1+r) = 2s^2 + 3s + 1 - 1 - r = 2s^2 + 3s - r$

para fcp nula: $r = 0$ pois $\det = s(2s+3)$

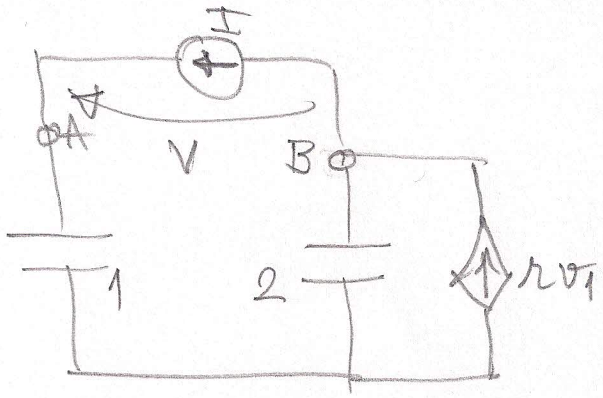
Outro jeito: Notar que, para $r=0$, temos corte de cap. na rede livre. (Se $r>0$ vinculado domina e carrega e se $r<0$ vinc. descarrega os caps).

(2)

$$Y_{AB} = E_A - E_B = \frac{\begin{vmatrix} I_s+1 & -1 \\ 0 & 2s+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s+1 & I_s+1 \\ -1-r & 0 \end{vmatrix}}{2s^2+3s-r} = \frac{(I_s+1)\left[2s+1-1-r\right]}{2s^2+3s-r}$$

com $r=-4$ $\quad Y_{AB} = (I_s+1)\cdot\dfrac{2s+4}{2s^2+3s+4}$

3)



$$\left.\begin{array}{l} sE_A = I \\ s2E_B - rE_A = -I \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 \\ -r & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\det = 2s^2$$

$$E_A - E_B = \frac{\begin{vmatrix} I & 0 \\ -I & 2s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & I \\ -r & -I \end{vmatrix}}{2s^2} = \frac{2sI + sI - rI}{2s^2} = \frac{(3s-r)I}{2s^2}$$

$$Z_0(s) = \frac{3s - r}{2s^2}$$

4) a correta é a da superposição.

5 – Deseja-se escrever as equações de análise do circuito da Figura 4 de modo a evitar o uso de integrais, no domínio do tempo, ou de termos do tipo 1/s no domínio de Laplace. Para tanto, adotaram como incógnitas as correntes de malha i_1 e i_2 e a tensão v sobre o capacitor, conforme a Figura 4. As equações de análise podem ser escritas na forma matricial em Laplace como

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 1 \\ 0 & A & -1 \\ 1 & -1 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ Li_0 \\ D \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} v(0_-) = v_0 \\ i_2(0_-) = i_0 \end{matrix}$$

Os termos A, B e D da equação acima correspondem respectivamente a:

a) sL ; $1/(sC)$; $C v_0$

b) $R_2 + sL$; sC ; $-C/v_0$

c) R_2 ; $-sC$; $C v_0$

d) $R_2 + sL$; $-sC$; $-C v_0$

e) $\frac{1}{sL}$; $1/(sC)$; $\frac{v_0}{s}$

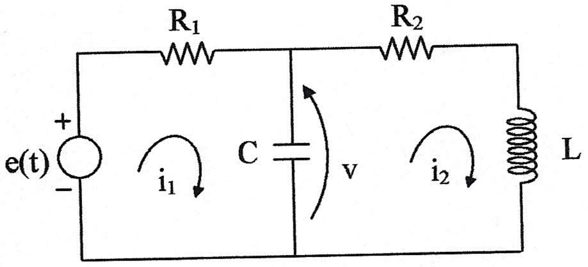


Figura 4

6 – Para realizar análise de malhas no circuito da Figura 5, a variável controladora do gerador vinculado v deve ser expressa em termos das correntes de malha. A expressão correta para V(s) nessa substituição é:

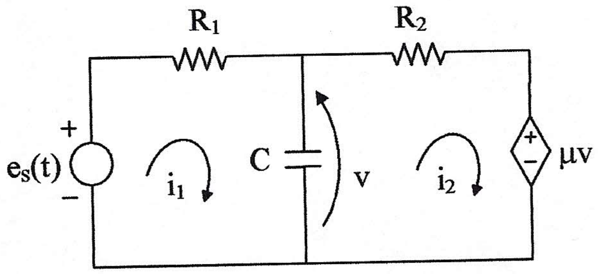
a) $\frac{1}{sC}(I_1 - I_2) + \frac{v_0}{s}$

b) $-\frac{1}{sC}(I_1 - I_2)$

c) $sC(I_1 - I_2)$

d) $\frac{1}{sC}(I_1 - I_2) - \frac{v_0}{s}$

e) n.d.a.



$v(0_-) = v_0$ **Figura 5**

7 – No circuito da Figura 6, a expressão da corrente $i_2(t)$ com condições iniciais nulas é:

a) $(3{,}5 - 0{,}7\, e^{-2t} - 4{,}5\, e^{-2t})\, H(t)$

b) $(3{,}5 - 4{,}2\, e^{-2t} + 0{,}7\, e^{-12t})\, H(t)$

c) $3{,}5\, e^{-2t} \cos(4{,}2\, t - 32{,}5^\circ)\, H(t)$

d) $(4{,}2 - 3{,}5\, e^{-2t} - 0{,}7\, e^{-12t})\, H(t)$

e) $(0{,}7\, e^{-12t} + 4{,}2\, e^{-2t})\, H(t)$

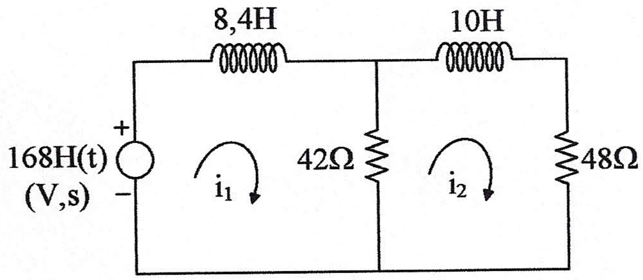


Figura 6

8 – Dado o circuito da Figura 7, a função de transferência $\left.\dfrac{V_0(s)}{I_0(s)}\right|_{\text{c.i.n.}}$ é:

a) $\dfrac{s(s+4)}{4s^2 + 16s + 4}$

b) $\dfrac{s+4}{4s^2 + 12s + 1}$

c) $\dfrac{s}{4s^2 + 12s + 1}$

d) $\dfrac{s}{s^2 + 12s + \dfrac{1}{2s}}$

e) $\dfrac{4s(s+4)}{2s^2 + 12s + 1}$

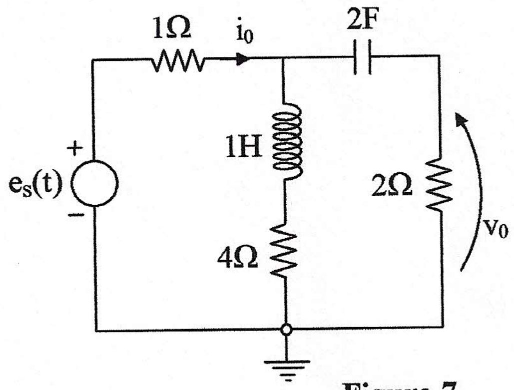
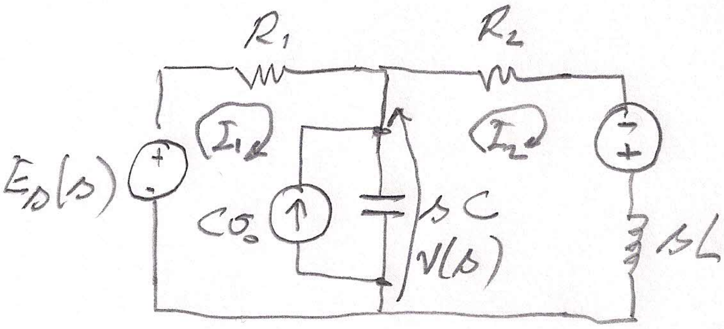


Figura 7

Teste 5



$$E_s(s) = R_1 I_1 + V$$

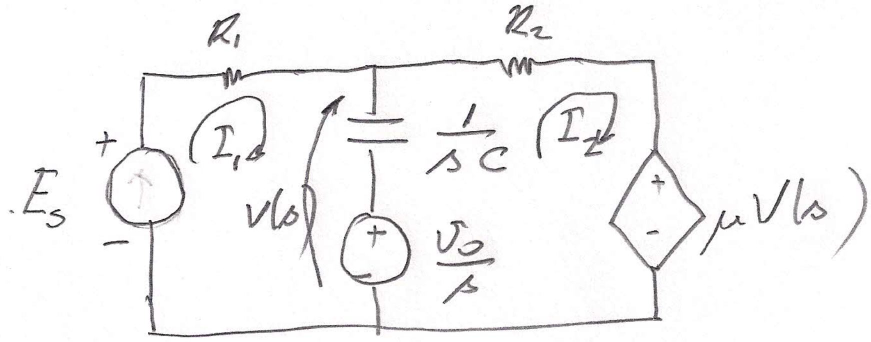
$$sLI_2 - Li_0 + R_2 i_2 - V = 0$$

$$sCV = I_1 - I_2 + Cv_0$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 1 \\ 0 & R_2 + sL & -1 \\ 1 & -1 & -sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Li_0 \\ -Cv_0 \end{bmatrix}$$

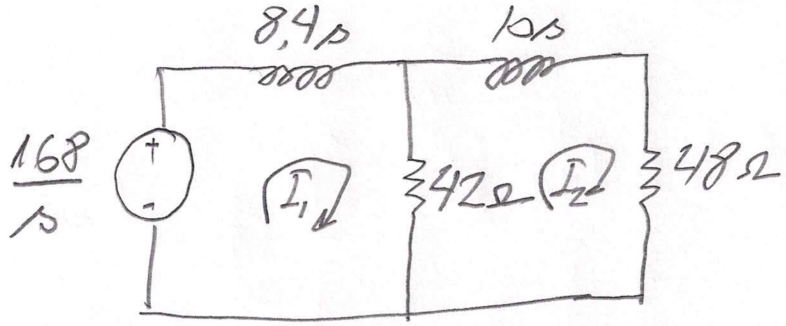
$A = R_2 + sL \quad B = -sC \quad D = -Cv_0$

Teste 6



$$V(s) = \frac{1}{sC}(I_1 - I_2) + \frac{v_0}{s}$$

Teste 7



condições iniciais nulas

$$\begin{bmatrix} 8{,}4s+42 & -42 \\ -42 & 90+10s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8{,}4s+42 & 168/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix}}{(90+10s)(8{,}4s+42)-1764} = \frac{7056/s}{84(s^2+14s+24)}$$

Determinando os pólos:

$$s_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196-96}}{2} \quad s_1 = -2 \quad s_2 = -12$$

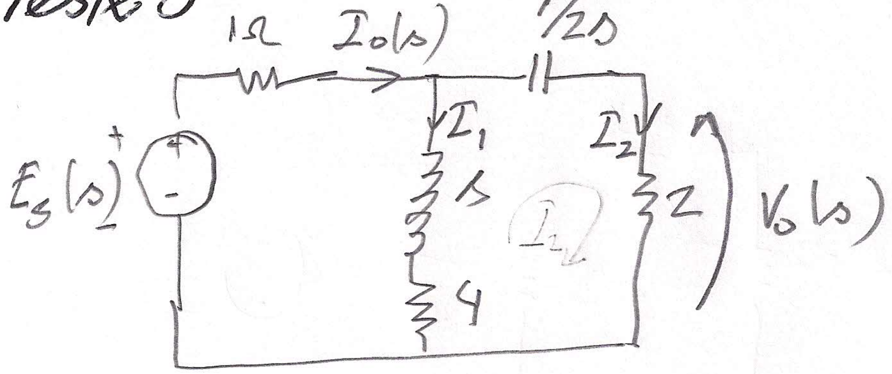
$$I_2 = \frac{84}{s(s+2)(s+12)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+12}$$

$$A_1 = \frac{84}{24} = 3{,}5 \qquad A_2 = \frac{84}{(-2)(10)} = -4{,}2$$

$$A_3 = \frac{84}{(-12)(-10)} = 0{,}7$$

Logo $i_2(t) = 3{,}5 - 4{,}2e^{-2t} + 0{,}7e^{-12t}$

Teste 8



Aplicando a divisão de correntes

$$I_2 = \frac{(s+4)I_o}{s+4+2+\frac{1}{2s}}$$

$$V_o = 2I_2 = \frac{2(s+4)I_o}{s+6+\frac{1}{2s}}$$

$$\left.\frac{V_o}{I_o}\right|_{c.i.n} = \frac{4s(s+4)}{2s^2+12s+1}$$

Considere o circuito da Figura 8 para os **testes de 09 a 12,** sendo **k o coeficiente de acoplamento** e a equação de análise de malhas referente à Malha 1 no domínio de Laplace:

$$(R_1 + sL_{eq1})\, I_1(s) + sL_{eq2}\, I_2(s) = E_s(s) + L_{eq1}\, i_{10} + L_{eq2}\, i_{20}$$

9 – O valor de L_{eq1} é igual a:

a) $L_1 + L_2 + k\sqrt{L_1 L_2}$

b) $\dfrac{L_1 L_2 - k^2\sqrt{L_1 L_2}}{L_1 + L_2}$

c) $L_1 + L_2 - k\sqrt{L_1 L_2}$

d) $L_2 + \dfrac{R_2}{r}\, k\sqrt{L_1 L_2}$

e) $\dfrac{L_1 L_2 + k^2\sqrt{L_1 L_2}}{\frac{R_2}{r} + 2k\sqrt{L_1 L_2}}$

Condições iniciais

$i_1(0_-) = i_{10}$
$i_2(0_-) = i_{20}$

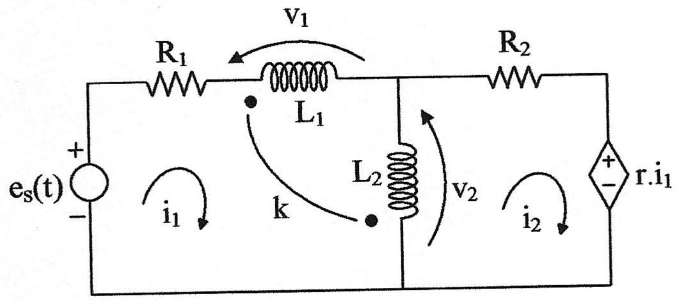


Figura 8

Esta questão foi anulada porque não há resposta correta.

10 – O valor de L_{eq2} é igual a:

a) $L_1 + L_2 + k\sqrt{L_1 L_2}$

b) $L_1 + L_2 - k\sqrt{L_1 L_2}$

c) $k\sqrt{L_1 L_2} - L_1$

d) $k\sqrt{L_1 L_2} - L_2$

e) $L_2 + k\sqrt{L_1 L_2}$

11 – A equação de análise de malhas em Laplace referente à Malha 2 é:

a) $\left(r - sL_2 + sk\sqrt{L_1 L_2}\right) I_1(s) + (R_2 + sL_2) I_2(s) = -\left(L_2 - k\sqrt{L_1 L_2}\right) i_{10} + L_2\, i_{20}$

b) $\left(r + sk\sqrt{L_1 L_2}\right) I_1(s) + (R_2 + sL_2) I_2(s) = k\sqrt{L_1 L_2}\, i_{10} + L_2\, i_{20}$

c) $(r + sL_2) I_1(s) + (R_2 + sL_2) I_2(s) = L_2(i_{10} - i_{20})$

d) $-\left(sL_2 + k\sqrt{L_1 L_2}\right) I_1(s) + (R_2 + r + sL_2) I_2(s) = L_2\, i_{20}$

e) $\left(r + sL_2 + sk\sqrt{L_1 L_2}\right) I_1(s) + (R_2 + sL_2) I_2(s) = L_2\, i_{20}$

12 – Para determinados valores dos componentes e no caso de **acoplamento perfeito** e condições iniciais nulas, obteve-se a seguinte equação de análise de malhas em Laplace:

$$\begin{bmatrix} s+1 & -2s \\ r-2s & 4s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s/(s^2+16) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nessas condições pode-se afirmar que:

a) O circuito apresenta uma FCP nula devido ao laço de indutores.

b) O circuito é instável independentemente do valor de r.

c) O circuito é redutível devido ao acoplamento perfeito e assintoticamente estável para $r > -3$

d) O circuito é marginalmente estável para $r = 0$

e) O acoplamento perfeito faz com que uma FCP do circuito seja nula e a outra igual a $-1/3$ para $r = 0$

PSI3213 – Gabarito dos Testes 9 a 12 da P2 – 2017

9) e 10) Vamos fazer a análise de malhas desse circuito em Laplace. Para isso, vamos primeiramente transformar as expressões de

$$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} - k\sqrt{L_1L_2}\frac{d(i_1-i_2)}{dt} = \left(L_1 - k\sqrt{L_1L_2}\right)\frac{di_1}{dt} + k\sqrt{L_1L_2}\frac{di_2}{dt}$$

e

$$v_2(t) = L_2\frac{d(i_1-i_2)}{dt} - k\sqrt{L_1L_2}\frac{di_1}{dt} = \left(L_2 - k\sqrt{L_1L_2}\right)\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt},$$

o que leva a

$$V_1(s) = s\left(L_1 - k\sqrt{L_1L_2}\right)I_1(s) - \left(L_1 - k\sqrt{L_1L_2}\right)i_{10} + sk\sqrt{L_1L_2}\,I_2(s) - k\sqrt{L_1L_2}\,i_{20}$$

e

$$V_2(s) = s\left(L_2 - k\sqrt{L_1L_2}\right)I_1(s) - \left(L_2 - k\sqrt{L_1L_2}\right)i_{10} - sL_2I_2(s) + L_2i_{20}.$$

A segunda LK na Malha 1 é dada por

$$R_1I_1(s) + V_1(s) + V_2(s) = E_s(s),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left[R_1 + s\left(L_1 + L_2 - 2k\sqrt{L_1L_2}\right)\right]I_1(s) + s\left(k\sqrt{L_1L_2} - L_2\right)I_2(s) = E_s(s)\\ + \left(L_1 + L_2 - 2k\sqrt{L_1L_2}\right)i_{10} + \left(k\sqrt{L_1L_2} - L_2\right)\, i_{20}\end{aligned}$$

Comparando com a equação fornecida, obtém-se

$$\boxed{L_{eq1} = L_1 + L_2 - 2k\sqrt{L_1L_2}}$$

e

$$\boxed{L_{eq2} = k\sqrt{L_1L_2} - L_2}$$

11) A equação da segunda LK na Malha 2 leva a

$$rI_1(s) + R_2I(2) - V_2(s) = 0$$

ou seja

$$\boxed{\left[r - s\left(L_2 - k\sqrt{L_1L_2}\right)\right]I_1(s) + (R_2 + sL_2)\,I_2(s) = -\left(L_2 - k\sqrt{L_1L_2}\right)i_{10} + L_2i_{20}}$$

12) Calculando o determinante da matriz de sistema temos

$$\mathrm{Det}(Z_m) = (s+1)(4s+2) - (-2s)(r-2s) = 4s^2 + 2s + 4s + 2 + 2rs - 4s^2 = (6+2r)s + 2$$

Devido ao acoplamento perfeito, o circuito é redutível e sua única FCP vale

$$s = -\frac{2}{6+2r}$$

Para que o circuito livre seja assintoticamente estável

$$6 + 2r > 0 \Rightarrow r > -3$$