PSI.3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

1ª Prova Semestral – 30/08/17

GABARITO

1ª Questão: (4,0 pontos)

a) A solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} + y = t$ com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$ pode ser escrita na forma $y(t) = K_1\cos(t) + K_2\text{sen}(t) + K_3 t$

Obtenha os valores de K_1, K_2 e K_3.

$K_1 =$ 1 $\qquad K_2 =$ −1 $\qquad K_3 =$ 1

Transformando a equação dada por Laplace tem-se:

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - \underbrace{\dot{y}(0)}_{0} + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + s$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1}$$

A primeira parcela pode ser expandida em frações parciais

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{s^2} + \frac{A_{21}}{s-j} + \frac{A_{21}^*}{s+j}$$

$$A_{12} = \left.\frac{1}{(s^2+1)}\right|_{s=0} = 1 \qquad A_{11} = \left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{(s^2+1)}\right\}\Big|_{s=0} = 0$$

$$A_{21} = \left.\frac{1}{s^2(s+j)}\right|_{s=j} = \frac{1}{(-1)(2j)} = \frac{-1}{2j} = \frac{j}{2} = \frac{1}{2}\angle 90^\circ$$

Antitransformando cada parcela vem

$$y(t) = t - \text{sen}(t) + \cos t$$

$$K_1 = 1 \qquad K_2 = -1 \qquad K_3 = 1$$

b) Resolvendo a equação diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} + A\frac{dy}{dt} + By = 2e^{-t}$ $t \geq 0$, com condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$ determinou-se que $Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$

Os valores de A e B são:

A = 5 B = 6

A partir de Y(s) a determinação de y(t) é imediata

$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

daí:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-t} + 4e^{-2t} - 9e^{-3t}$$

logo

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{A\,dy}{dt} + By = e^{-t}(1-A+B) + e^{-2t}(4-2A+B) + e^{-3t}(-9+3A-B) = 2e^{-t}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{array}{l} 1-A+B = 2 \\ 4-2A+B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 5 \\ B = 6 \end{array}$$

c) Um circuito possui função de rede $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+10}$. Calcule a sua resposta forçada y(t) para uma entrada x(t) em degrau unitário, apresentando a solução na forma

$$y(t) = [\, A + B \cos(3t + C)\,]\, H(t)$$

Os valores de A, B e C são: (Indique as respostas sem calcular)

A = $0,2$ B = $1/3$ C = $tg^{-1}(3) - tg^{-1}(1/3) + 180°$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+2}{s(s+1+3j)(s+1-3j)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1-3j} + \frac{A_2^*}{s+1+3j}$$

$$A_1 = \left.\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right|_{s=0} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$A_2 = \left.\frac{s+2}{s(s+1+3j)}\right|_{s=-1+3j} = \frac{1+3j}{(-1+3j)(6j)} = \frac{1+3j}{-18-6j} = \frac{1+3j}{6(-3-j)}$$

$$= \frac{\sqrt{10}\,\angle tg^{-1}(3)}{6\sqrt{10}\,\angle tg^{-1}(-1/3)} = \frac{1}{6}\left(\angle tg^{-1}(3) - \angle tg^{-1}(\tfrac{1}{3}) + 180°\right)$$

$$y(t) = 0,2 + \frac{1}{3}\cos(3t + 126,87°)$$

d) Considerando o mesmo circuito do item c), agora com entrada $x(t) = 2\cos 5t$. Sabe-se que sua resposta em regime permanente é da forma $\hat{y} = \frac{A + jB}{C + jD}$. Os valores de A, B, C e D valem:

A: 4 B: 10 C: -15 D: 10

$$\hat{y} = \frac{5j + 2}{(5j)^2 + 10j + 10} \cdot 2\angle 0^\circ$$

$$= \frac{5j + 2}{-15 + 10j} \cdot 2\angle 0^\circ = \frac{4 + 10j}{-15 + 10j}$$

<u>Atenção</u>: Preencher a folha ótica com seu nome, nº USP e opções escolhidas para cada teste.

1 – Para o circuito da Figura 1, considere e(t) como entrada e i(t) como saída. A equação (no tempo ou no domínio de Laplace) que descreve a **resposta ao impulso** é:

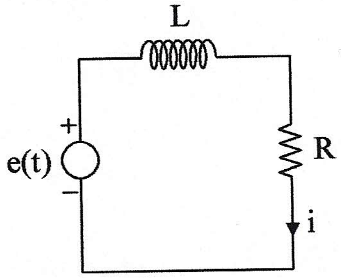

Figura 1

a) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = \delta(t) + \cos(t)$

b) $I(s) = \mathcal{L}(\delta(t))$

c) $(sL + R)\, I(s) = 1$

d) $(sLR + 1)\, I(s) = 1$

e) Não é possível escrevê-la sem conhecer as condições iniciais.

2 – Em determinado circuito há um indutor com corrente inicial i_0 conforme figura 2a.

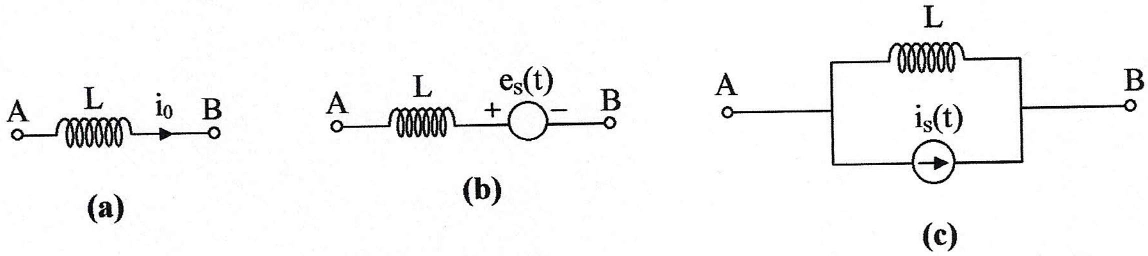

Figura 2

Queremos substituí-lo por um indutor descarregado (corrente inicial nula) em série com um gerador $e_S(t)$ ou em paralelo com um gerador $i_S(t)$ conforme as figuras 2b e 2c.

Quais serão as expressões analíticas de $e_S(t)$ e $i_S(t)$?

Dica: Ache a Transformada de Laplace da equação constitutiva do indutor.

a) $Li_0 H(t)$ e $i_0 H(t)$

b) $-Li_0 \delta(t)$ e $i_0 H(t)$

c) $-Li_0 H(t)$ e $i_0 \delta(t)$

d) $Li_0 \delta(t)$ e $i_0 H(t)$

e) $-Li_0 \delta(t)$ e $i_0 \delta(t)$

3 – Qual é a expressão da anti-transformada de Laplace de $V(s) = \dfrac{6s+39}{s^2+8s+52}$ (para t > 0)

a) $e^{-4t}\, 8\cos(6t + 45^\circ)$

b) $e^{-2t}\cos(8t)$

c) $e^{-4t}\,[\,10\cos(6t) - \text{sen}(6t)\,]$

d) $e^{-4t}\,[\,6\cos(6t) + 2{,}5\,\text{sen}(6t)\,]$

e) $e^{-8t}\,[\,4\cos(6t) + 5\,\text{sen}(2t)\,]$

4 – Considere o circuito da Figura 3. A equação diferencial que descreve o circuito (proveniente da aplicação da 1ª Lei de Kirchhoff) ao nó com tensão nodal "e", já transformada por Laplace é:

a) $(G_1 + G_2 + g + sC)\,E(s) = G_1 E(s) - Cv_0$

b) $(G_1 - G_2 + g - sC)\,E(s) = E(s)$

c) $(sC + G_1 - G_2)\,E(s) = E(s) + v_0$

d) $(G_1 + G_2 - 2g + sC)\,E(s) = G_1 E(s) - Cv_0$

e) $(G_1 + G_2 - g + sC)\,E(s) = G_1 E_s(s) + Cv_0$

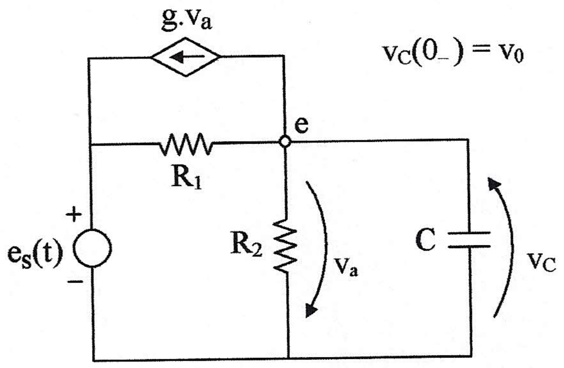

Figura 3

Gab

1) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = \delta(t)$

$sLI + RI = 1$ (c.i. nulas conforme def. de resp. impulsiva)

ou $(sL+R)\,I(s) = 1$

---

2) $v = L\dfrac{di}{dt} \rightarrow V = \underbrace{sLI}_{\text{V para indutor sem } i_0} - Li_0$ ou $I = \underbrace{\dfrac{V}{sL}}_{\text{I para indutor sem } i_0} + \dfrac{i_0}{s}$

$\therefore\ -Li_0\,\delta(t)$ e $i_0\,H(t)$

---

3) $$V(s) = \frac{6s+39}{s^2+8s+52} = \frac{6s+39}{(s+4)^2+36} = \frac{6(s+4)+15}{(s+4)^2+36} = \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+36} + \frac{2{,}5 \cdot 6}{(s+4)^2+36}$$

$$\longrightarrow v(t) = e^{-4t}\left[6\cos(6t) + 2{,}5\,\mathrm{sen}(6t)\right]$$

---

4) $G_1(e-e_s) + G_2 e + g(-e) + CDe = 0$

$G_1(E-E_s) + G_2 E + g(-E) + sCE - Ce(0_-) = 0$

$(G_1 + G_2 - g + sC)\,E(s) = G_1 E_s(s) + C\underbrace{e(0_-)}_{v_0}$.

5 – A antitransformada de Laplace de $F(s) = e^{-sT}$ é:

a) $\delta(t-T)$

b) $e^{-t/T}H(t)$

c) $H(t-T)$

d) $H(t) - H(t-T)$

e) $\delta(t) - \delta(t-T)$

6 – A antitransformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^2}$ é:

a) $\delta(t) + \frac{3}{4}\left(1-e^{-t/2}\right)H(t) + t\,e^{-t/2}H(t)$

b) $\frac{3}{4}\left(1-e^{-2t}\right)H(t) - \frac{1}{2}\,t\,e^{-2t}H(t)$

c) $\delta(t) - \frac{1}{2}\left(1-e^{-t/2}\right)H(t) + \frac{3}{4}\,t\,e^{-t/2}H(t)$

d) $\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)H(t) + \frac{3}{4}\,t\,e^{-2t}H(t)$

e) $\delta(t) + \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)H(t) + \frac{3}{4}\,t\,e^{-2t}H(t)$

7 – Sabe-se que a relação entre a transformada Y(s) da resposta e a transformada U(s) da excitação é $(s^2 + 2s + 5)\,Y(s) = (3s + 1)\,U(s) + s - 5$. A expressão da função de rede é:

a) $\dfrac{s-5}{s^2+2s+5}$

b) $\dfrac{s^2+2s+5}{s-5}$

c) $\dfrac{3s+1}{s^2+2s+5}$

d) $\dfrac{s^2+2s+5}{3s+1}$

e) $\dfrac{4s-4}{s^2+2s+5}$

8 – Uma rede tem duas entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e duas saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Sabe-se que as equações diferenciais transformadas são $\begin{bmatrix} 2s & s+1 \\ s & 3s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$.

A função de transferência $G_{11}(s)$ da entrada $u_1(t)$ à saída $y_1(t)$ é:

a) $\dfrac{s+1}{5s^2-3s}$

b) $\dfrac{2s}{3s-1}$

c) $\dfrac{s+1}{3s-1}$

d) $\dfrac{3s-1}{5s^2-3s}$

e) $\dfrac{2}{5s^2-3s}$

Gabarito

5) A transformada
$$F(s) = e^{-sT}$$
resulta da propriedade de translação no domínio do tempo
$$\mathcal{L}\{g(t-T)\} = \int_{0_-}^{\infty} g(t-T)\, e^{-st}\, dt$$
$$= e^{-sT}\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$
No caso,
$$\mathcal{L}\{g(t)\} = 1$$
e
$$g(t) = \delta(t),$$
resultando
$$f(t) = \delta(t-T)$$

6) Fazemos expansão em frações parciais
$$F(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2}$$
$$= \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{21}}{s+2} + \frac{A_{22}}{(s+2)^2}$$
Calculamos os resíduos A_{11} e A_{22}.
$$A_{11} = \left[s F(s)\right]\Big|_{s=0}$$
$$= \frac{s+3}{(s+2)^2}\Big|_{s=0} \longrightarrow \boxed{A_{11} = \frac{3}{4}}$$
$$A_{22} = \left[(s+2)^2 F(s)\right]\Big|_{s=-2}$$
$$= \frac{s+3}{s}\Big|_{s=-2} \longrightarrow \boxed{A_{22} = -\frac{1}{2}}$$
Calculamos o resíduo A_{21} por identificação de polinômios
$$A_{11}(s+2)^2 + A_{21}\, s(s+2) + A_{22}\, s \equiv s+3$$
$$(A_{11} + A_{21})s^2 + (4A_{11} + 2A_{21} + A_{22})s + 4A_{11} \equiv s+3$$
$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = 0 \longrightarrow \boxed{A_{21} = -\frac{3}{4}} \\ 4A_{11} + 2A_{21} + A_{22} = 1 \longrightarrow 3 - \frac{3}{2} + A_{22} = 1 \longrightarrow A_{22} = -\frac{1}{2} \\ 4A_{11} = 3 \longrightarrow A_{11} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{\frac{3}{4}}{s} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2}$$

com antitransformada

$$f(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2} t e^{-2t}$$

7) Com condições iniciais nulas, temos a relação

$$(s^2 + 2s + 5) Y(s) = (3s + 1) U(s)$$

e a função de rede

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s+1}{s^2+2s+5}$$

8)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2s & s+1 \\ s & 3s-1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5s^2 - 3s$$

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} U_1(s) & s+1 \\ U_2(s) & 3s-1 \end{vmatrix}}{5s^2 - 3s}$$

$$= \frac{3s-1}{5s^2-3s} U_1(s) - \frac{s+1}{5s^2-3s} U_2(s)$$

Com $U_2(s) = 0$, temos

$$G_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \longrightarrow G_{11}(s) = \frac{3s-1}{5s^2-3s}$$

9 – Seja a transformada de Laplace $F(s) = \dfrac{2s^2+14s+5}{s^2+7s+10}$. O valor de $f(0_+)$ é:

a) 0
b) $+\infty$
c) 2
d) 1/2
e) 5

10 – Seja a transformada de Laplace $F(s) = \dfrac{10(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$. O valor de $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ é:

a) 10
b) 5
c) 0
d) $5 + 5\sqrt{2}\cos(-135^o)$
e) Não pode ser calculado pelo Teorema do Valor Final.

11 – Seja $G(s) = \dfrac{s}{s-1}$ a função de rede de um circuito elétrico com entrada $E_g(s)$ e saída $V(s)$. Considerando $e_g(t) = 2\cos t$ (V,s) a saída $v(t)$ em regime permanente senoidal é em (V,s):

a) $\sqrt{2}\cos(t+135^o)$
b) $\sqrt{2}\cos(t-45^o)$
c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos(t+45^o)$
d) $\sqrt{2}\cos(t-135^o)$
e) O circuito não atinge o RPS.

12 – Um circuito elétrico que tem como entrada a tensão $e_g(t)$ e como saída a tensão $v(t)$ é descrito pela seguinte função de rede

$$G(s) = \left.\frac{V(s)}{E_g(s)}\right|_{c.i.n.} = \frac{2s}{s^2+2s+8}$$

A resposta em regime permanente senoidal (RPS) para a excitação

$$e_g(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t-60^\circ) \quad (V,s)$$

é expressa em (V,s) por:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(2t+45^\circ)$

b) $\cos(2t+105^\circ)$

c) $\sqrt{2}\cos(2t-105^\circ)$

d) $2\cos(2t-15^\circ)$

e) $\sqrt{2}\cos(2t-45^\circ)$

PSI3213 – Gabarito dos Testes 9 a 12 da P1 – 2017

9) Como a transformada não é estritamente própria, não podemos usar o TVI diretamente. Antes, é necessário fazer uma divisão de polinômios, o que leva a

$$F(s) = \frac{2s^2 + 14s + 5}{s^2 + 7s + 10} = 2 + \underbrace{\frac{-15}{s^2 + 7s + 10}}_{F_1(s)}.$$

Note que a constante 2 corresponde ao termo $2\delta(t)$ de $f(t)$ e portanto não influencia em $t = 0_+$. Além disso, a função $F_1(s)$ é estritamente própria e por isso, podemos usar o TVI, ou seja,

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{-15s}{s^2 + 7s + 10} = 0$$

Assim,

$$\boxed{f(0_+) = 0}$$

10) Como $F(s)$ não tem polos no semiplano esquerdo, podemos usar diretamente o TVF. Assim,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2} = 5$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = 5} \tag{1}$$

11) Como $F(s)$ tem um polo em $s = +1$, o circuito não atinge o RPS. Note que a transformada da resposta forçada pode ser calculada como

$$V(s) = F(s)E_g(s) = \frac{2s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{(\sqrt{2}/2)\mathrm{e}^{-j45^\circ}}{s+j} + \frac{(\sqrt{2}/2)\mathrm{e}^{-j45^\circ}}{s-j}.$$

Antitransformando, temos

$$v(t) = \mathrm{e}^t H(t) + \sqrt{2}\cos(t - 45^\circ)H(t)$$

que tende a ∞ quando $t \to \infty$. Portanto,

$$\boxed{\text{O circuito não atinge o RPS.}}$$

12) Como os polos estão no semiplano esquerdo, o circuito atinge o RPS. Assim,

$$\widehat{V} = G(j2)\widehat{E}_g = \frac{2(j2)}{(j2)^2 + 2(j2) + 8} 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j60^\circ} = \frac{8\sqrt{2}\mathrm{e}^{j30^\circ}}{4\sqrt{2}\mathrm{e}^{j45^\circ}} = 2\mathrm{e}^{-j15^\circ}.$$

Portanto

$$\boxed{v(t) = 2\cos(2t - 15^\circ)}$$