

**Método dos Mínimos Quadrados 2 – Parte Teórica****O método dos Mínimos Quadrados e a Série de Fourier**

Inicialmente vamos mostrar que o método dos mínimos quadrados pode ser usado para aproximar uma função contínua por um conjunto de outras funções de um subespaço de funções contínuas em um intervalo fechado. Em seguida, deduzimos a representação da Série de Fourier usando a solução do problema de aproximação de funções segundo o método dos mínimos quadrados.

**1 Aproximação de funções com o método dos mínimos quadrados**

Seja uma função  $f(t)$  contínua em um intervalo fechado  $[T_a, T_b]$ . Deseja-se encontrar a melhor aproximação de  $f(t)$  dentre todas as funções de um subespaço vetorial de funções contínuas em um intervalo  $[T_a, T_b]$ . A seguir vamos mostrar uma solução para esse problema usando o critério dos mínimos quadrados.

Considere que  $f(t)$  é a função a ser aproximada por

$$\hat{f}(t) = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) + \cdots + \alpha_n g_n(t), \quad (1)$$

em que  $\{g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)\}$  são funções contínuas em um intervalo  $[T_a, T_b]$ . Por conveniência, vamos escrever  $\hat{f}(t)$  como o produto interno de vetores

$$\hat{f}(t) = \mathbf{g}^T(t) \boldsymbol{\alpha}, \quad (2)$$

sendo  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \cdots \ \alpha_n]^T$ ,  $\mathbf{g}(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ g_3(t) \ \cdots \ g_n(t)]^T$  e  $[\cdot]^T$  denota a operação de transposição.

Uma medida usual para assegurar a qualidade da aproximação é

$$\text{EQM} = \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)]^2 dt \quad (3)$$

e representa o erro quadrático médio da aproximação para  $t \in [T_a, T_b]$  em que as funções  $f(t)$  e  $\hat{f}(t)$  são contínuas. Note que EQM é uma função quadrática em relação aos coeficientes  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  e, portanto, possui um único ponto de mínimo em relação a esses

coeficientes. Aplicando a derivada em (3) em relação ao  $i$ -ésimo coeficiente temos

$$\frac{\partial \text{EQM}}{\partial \alpha_i} = -2 \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] \frac{\partial \hat{f}(t)}{\partial \alpha_i} dt = -2 \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] g_i(t) dt. \quad (4)$$

Para encontrar a melhor aproximação de  $f(t)$  segundo o critério dos mínimos quadrados a igualdade

$$\int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] g_i(t) dt = 0 \quad (5)$$

deve ser satisfeita para todo coeficiente  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Essas  $n$  igualdades podem ser representadas na seguinte equação vetorial

$$\begin{bmatrix} \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] g_1(t) dt \\ \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] g_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] g_n(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ou ainda de modo compacto

$$\int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \hat{f}(t)] \mathbf{g}(t) dt = \mathbf{0}, \quad (7)$$

em que  $\mathbf{0}$  é um vetor coluna com  $n$  zeros.

Vamos denotar  $\boldsymbol{\alpha}^*$  o vetor de coeficientes, que quando usado para obter  $\hat{f}(t) = \mathbf{g}^T(t) \boldsymbol{\alpha}^*$  satisfaz a igualdade (7). Assim, essa igualdade pode ser expressa como

$$\int_{T_a}^{T_b} [f(t) - \mathbf{g}^T(t) \boldsymbol{\alpha}^*] \mathbf{g}(t) dt = \underbrace{\int_{T_a}^{T_b} f(t) \mathbf{g}(t) dt}_{\mathbf{p}} - \underbrace{\left( \int_{T_a}^{T_b} \mathbf{g}(t) \mathbf{g}^T(t) dt \right)}_{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Note que  $\mathbf{p}$  é um vetor com cada elemento definido como  $\int_{T_a}^{T_b} f(t) g_i(t) dt$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Além disso,  $\mathbf{G}$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  com elemento  $(i, k)$  dado por

$$\int_{T_a}^{T_b} g_i(t) g_k(t) dt$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, n$ . Se a matriz  $\mathbf{G}$  for invertível, então,

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p} \quad (9)$$

é o vetor de coeficientes que minimiza EQM.

## 2 Aproximação através de funções trigonométricas

Seja a função trigonométrica

$$\begin{aligned} x(t) = & a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_K \cos(K\omega_0 t) \\ & + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots + b_K \sin(K\omega_0 t) \end{aligned} \quad (10)$$

com  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  e  $T_0$  pertencendo aos reais positivos. Note que

$$\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cdots, \cos(K\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \cdots, \sin(K\omega_0 t)\}$$

são funções linearmente independentes e  $x(t)$  é uma combinação linear dessas funções. Funções trigonométricas podem ser usadas para aproximar ou representar funções periódicas.

### ◇ Exercício 1

Seja uma função  $f(t)$  contínua no intervalo  $[0, T]$ . Deseja-se aproximar  $f(t)$  pela soma de senos e co-senos

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) = & a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_K \cos(K\omega_0 t) \\ & + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots + b_K \sin(K\omega_0 t). \end{aligned}$$

1.a) Por conveniência você pode representar  $\hat{f}(t)$  com o produto interno de vetores como em (2), ou seja,  $\hat{f}(t) = \mathbf{g}^T(t)\boldsymbol{\alpha}$  com

$$\mathbf{g}(t) = [1 \ \cos(\omega_0 t) \ \cos(2\omega_0 t) \ \cdots \ \cos(K\omega_0 t) \ \sin(\omega_0 t) \ \sin(2\omega_0 t) \ \cdots \ \sin(K\omega_0 t)]^T$$

e

$$\boldsymbol{\alpha} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_K, \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_K]^T.$$

Verifique que nesse caso, como as funções do vetor  $\mathbf{g}(t)$  são linearmente independentes, os elementos da matriz  $\mathbf{G}$  definida em (8) valem

$$\int_0^T g_i(t)g_k(t)dt = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ T/2; & i = k \neq 1 \\ T; & i = k = 1 \end{cases} \quad (11)$$

para todo  $i = 1, 2, \cdots, n$  e  $k = 1, 2, \cdots, n$  inteiros sendo  $n = 2K + 1$ .

1.b) Verifique que os elementos do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  que fornecem a melhor aproximação segundo o critério dos mínimos quadrados de  $f(t)$  sobre o intervalo  $[0, T]$  são dados por

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt, \quad (12)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t)dt \quad (13)$$

e

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t)dt \quad (14)$$

para  $k = 1, \cdots, K$ .

Genericamente para funções  $f(t)$  contínuas em um intervalo fechado  $[0, T]$ , espera-se que quanto maior o número de termos usados para obter

$$\hat{f}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$$

menor será o erro da aproximação. Pode-se provar que o erro quadrático médio da aproximação de  $f(t)$  tende a zero quando  $K \rightarrow \infty$  e nessa condição

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]. \quad (15)$$

A representação da Equação (15) é chamada de **Série de Fourier** na forma **retangular** de  $f(t)$  no intervalo  $[0, T]$ . Tais séries são amplamente usadas em diversos contextos nas Engenharias.

### 3 Séries de Fourier

Um sinal periódico  $s(t)$  qualquer, com período  $T_0$ , é igual a uma soma de senóides, ou seja,

$$s(t) = A_0 + A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_2\right) + A_3 \cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_3\right) + \dots \quad (16)$$

Cada função periódica terá seus próprios valores para  $A_k$  e  $\varphi_k$ . Conhecendo esses valores, pode-se descobrir informações que não são aparentes no gráfico de  $s(t)$ . Essa representação de um sinal periódico como uma somatória de co-senos é chamada **Série de Fourier**.

A somatória que descreve  $s(t)$  é composta de parcelas com frequências angulares iguais a  $0, 1 \cdot 2\pi/T_0, 2 \cdot 2\pi/T_0, 3 \cdot 2\pi/T_0, \dots$ . Cada parcela é uma harmônica do sinal  $s(t)$ . A parcela constante  $A_0$  é denominada componente **contínua**. A parcela com frequência igual à do sinal, ou seja,

$$A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_1\right)$$

é chamada **componente fundamental** ou **primeira harmônica** de  $s(t)$ , a parcela correspondente ao dobro da frequência é a segunda harmônica, e assim por diante. A frequência do sinal é  $f_0 = 1/T_0$  em hertz ou  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  em radianos/segundo.

#### ◇ Exercício 2

Mostre que a partir de (15) é possível chegar na representação polar da Série de Fourier

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \quad (17)$$

Forneça a relação entre os coeficientes  $(a_k, b_k)$  e  $(A_k, \varphi_k)$ .

◇ **Exercício 3**

Mostre que o sinal  $s(t)$  em forma de onda quadrada com amplitude  $A$  (valor pico-a-pico) como a da Figura 1 pode ser representado em termos de Série de Fourier na forma retangular com os coeficientes

$$a_0 = A/4; \quad a_k = 0 \quad \text{para } k \neq 0 \quad \text{e} \quad b_k = \begin{cases} 0; & k \text{ par} \\ \frac{2A}{k\pi}; & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

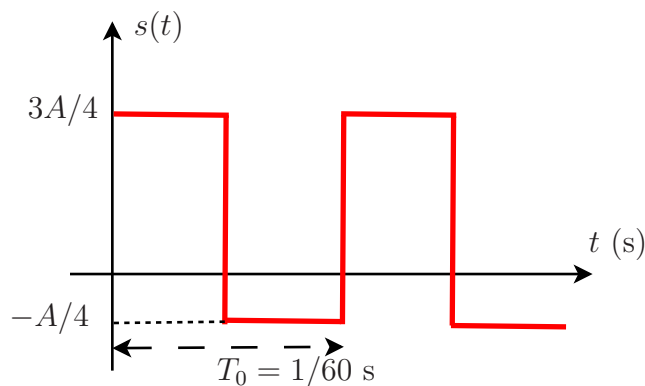


Figura 1: Representação da onda quadrada no tempo.

◇ **Exercício 4**

Considere o mesmo sinal do exercício anterior. Determine os coeficientes da Série de Fourier na forma polar.

Até agora calculamos os coeficientes da Série de Fourier a partir da função no domínio do tempo. Uma questão de interesse é como obter um determinado sinal no domínio do tempo com a soma de suas componentes em frequência. Na Figura 2, ilustramos o caso da síntese da onda quadrada a partir da soma sucessiva de suas harmônicas. Inicialmente ilustramos  $s_1(t)$ , que representa apenas o componente fundamental, ou seja, a primeira harmônica. O sinal  $s_5(t)$  representa a soma da componente fundamental mais a terceira e a quinta harmônicas e  $s_{50}(t)$  representa a soma das primeiras 50 harmônicas da série. Note que há um comportamento oscilatório na função aproximada. Além disso, essas oscilações vão se concentrando nas vizinhanças das descontinuidades da onda quadrada. Observa-se um sobre-sinal de aproximadamente 9%. Esse comportamento é chamado de fenômeno de Gibbs. Isso acontece porque a Série de Fourier é exata apenas quando a função é contínua. Em funções com descontinuidades, como o caso da onda quadrada, a Série de Fourier é aproximada nas vizinhanças das descontinuidades. Esse assunto será abordado com mais detalhes em cursos posteriores.

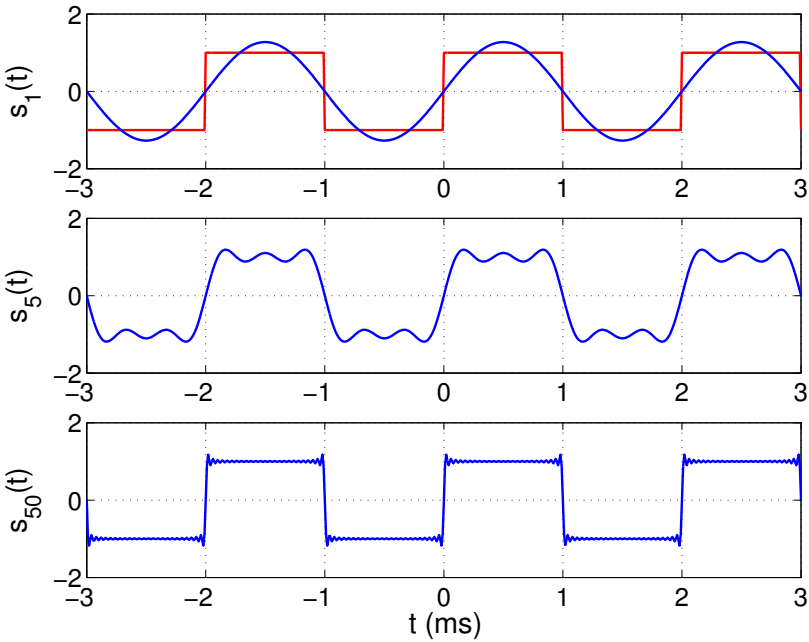


Figura 2: Aproximação da onda quadrada no tempo.