PSI-3260 Aplicações de Álgebra Linear
Experiência 6
Autovalores e Autovetores – Revisão teórica

A análise com autovalores e autovetores está presente em quase todos os ramos da Engenharia moderna. Inicialmente vamos rever definições e propriedades de autovalores e autovetores já tratadas em cursos teóricos de *Álgebra Linear*. Posteriormente, na parte experimental, exemplificamos a importância desses conceitos em contextos práticos.

1 Definições e propriedades de autovalores e autovetores

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $M \times M$ com elementos constantes. Essa matriz, quando aplicada a um vetor $\mathbf{x}$ com dimensão $M \times 1$, resulta em um vetor $\mathbf{y}$ com dimensão $M \times 1$, ou seja,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}. \tag{1}$$

Nota-se que a matriz $\mathbf{A}$ representa uma transformação linear que transforma um vetor $\mathbf{x}$ no vetor $\mathbf{y}$. O vetor $\mathbf{y}$ pode ser interpretado como resultado da projeção do vetor $\mathbf{x}$ nas colunas da matriz $\mathbf{A}$. De modo geral, essa transformação muda o módulo e a direção do vetor $\mathbf{x}$.

Um caso particular de grande interesse prático é aquele em que $\mathbf{x}$ é um vetor não nulo e $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{x}$. Para destacar esse vetor $\mathbf{x}$ dos demais vamos denotá-lo como $\mathbf{v}$, assim,

$$\boxed{\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}} \tag{2}$$

em que λ é uma constante real ou complexa. Nesse caso, a transformação linear aplicada em $\mathbf{v}$ resulta em um múltiplo escalar dele mesmo. O vetor particular $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ representa uma direção privilegiada no espaço formado pelas colunas da matriz $\mathbf{A}$, tal que a ação da transformação $\mathbf{A}$ sobre o vetor $\mathbf{v}$ age apenas sobre o módulo desse vetor mantendo a sua direção. O escalar λ é chamado de autovalor de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}$ de autovetor associado a λ. Cabe observar que para um dado autovalor λ podem existir vários vetores não nulos $\mathbf{v}$ que satisfazem (2), como veremos a seguir. Além disso, o autovetor $\mathbf{v}$ não pode ser nulo, porém, o autovalor λ pode ser nulo.

2 A obtenção dos autovalores e autovetores

Por conveniência vamos reescrever a Equação (2) da seguinte forma,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

em que $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade de dimensão $M \times M$ e $\mathbf{0}$ um vetor de zeros de dimensão $M \times 1$. Nota-se que λ é um autovalor da matriz $\mathbf{A}$ se e somente se (3) possui uma solução não trivial.

A partir de (3), usando conceitos de solução de sistemas de equações e particularizando para o caso de interesse, seguem as afirmações:

◊ A Equação (3) terá uma solução não trivial se e somente se $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ for singular, ou seja,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.} \tag{4}$$

Ao aplicar a operação de determinante em $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ obtemos um polinômio em λ, que representamos como

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^M + c_1\lambda^{M-1} + c_2\lambda^{M-2} \cdots c_M. \tag{5}$$

O polinômio $p(\lambda)$ é chamado de polinômio característico e $p(\lambda) = 0$ é chamada de equação característica.

◊ Nota-se que grau de $p(\lambda)$ é M, portanto, $p(\lambda) = 0$ possui M soluções. Essas soluções podem ser distintas, repetidas, reais ou complexas. Os valores de λ que satisfazem (5) são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Portanto, $\mathbf{A}$ possui M autovalores que podem ser distintos, repetidos, reais ou complexos.

◊ O conjunto de todas as soluções de (3), aqui denotada como $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é o espaço nulo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ e todos os autovetores da matriz $\mathbf{A}$ estão nesse espaço nulo. Assim, se λ é um autovalor de $\mathbf{A}$, então, $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{0\}$ e qualquer subespaço não nulo em $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é um autovetor associado a λ. O subespaço $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é chamado de autoespaço de λ.

Exemplos com $M = 2$

Nos exemplos a seguir, os autovalores são calculados a partir da Equação (4) e os autovetores associados são calculados resolvendo os sistemas de equações $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$.

1. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

os autovalores e os autovetores associados são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, e

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Esse exemplo ilustra o fato de que, embora o autovetor não possa ser um vetor nulo, o autovalor pode assumir o valor nulo.

2. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é $p(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda)$. Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Resolvendo os sistemas de equações $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_2$ obtemos os autovetores $\mathbf{v}_1 = [1\ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [0\ 1]^T$, respectivamente. Na Figura 1, são mostrados os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e as suas projeções no espaço formado pelas colunas da matriz $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal, os autovetores coincidem com as coordenadas do espaço Euclidiano.

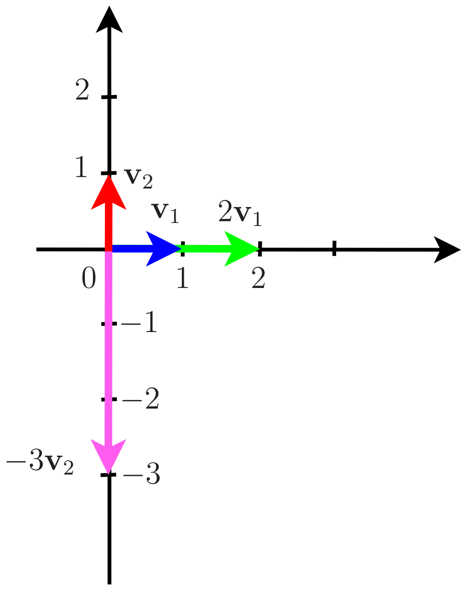

Figura 1: Vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e suas projeções, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal com autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$.

3. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda-5)(\lambda+2)$ e consequentemente os seus autovalores são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$. Resolvendo os sistemas de equações $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{v}_2$ obtemos os autovetores $\mathbf{v}_1 = [1\ \ -1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1\ 4/3]^T$, respectivamente.

Na Figura 2, são mostrados os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e as suas projeções no espaço formado pelas colunas da matriz $\mathbf{A}$. Nesse caso, como $\mathbf{A}$ não é uma matriz diagonal, os autovetores não coincidem com as coordenadas do espaço Euclidiano.

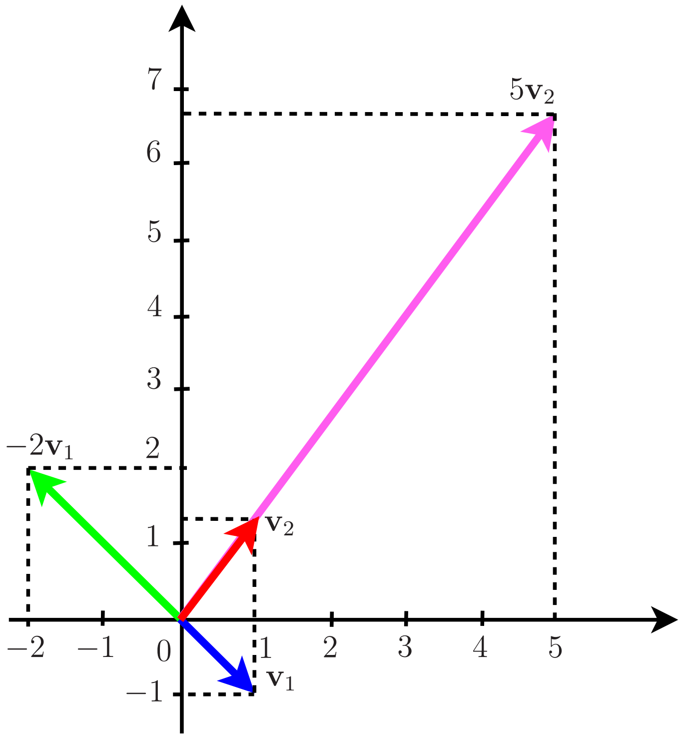

Figura 2: Vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e suas projeções, em que $\mathbf{A}$ não é diagonal com autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$.

De modo geral, nota-se que cada autovalor de $\mathbf{A}$ possui uma infinidade de autovetores associados. Assim, são também autovetores de $\mathbf{A}$ os vetores $\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| = [1\ \ -1]^T/\sqrt{2}$ e $\bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| = [3\ 4]^T/5$.
Os autovetores $\bar{\mathbf{v}}_1$ e $\bar{\mathbf{v}}_2$ são particularmente interessantes porque possuem norma unitária.

◊ No MatLab faça *help eig*. Use esse comando para conferir os autovalores e autovetores dos Exemplos 1, 2 e 3. Os autovetores fornecidos pelo MatLab possuem sempre norma unitária.

3 Diagonalização de matrizes

A cada matriz quadrada $\mathbf{A}$ de dimensão $M \times M$ está associado um conjunto de M autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_M\}$ e um conjunto de M autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_M\}$. Nota-se que cada autovalor λ_i está associado a um autovetor $\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \cdots, M$. Todas as M soluções podem ser agrupadas da seguinte forma

$$\mathbf{A}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_M \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{array}\right]. \tag{6}$$

Usualmente esse sistema de equações é definido de forma matricial, ou seja,

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VD}, \tag{7}$$

em que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal e $\mathbf{V}$ é uma matriz cujas colunas representam os M autovetores associados aos M autovalores.

Se os autovetores da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes, então, existe uma matriz invertível $\mathbf{V}$, e, cabem as relações e observações dadas a seguir.

◊ Multiplicando (7) à esquerda por $\mathbf{V}^{-1}$, chega-se a igualdade

$$\boxed{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}.} \tag{8}$$

Nesse caso, podemos dizer que a matriz $\mathbf{V}$ diagonaliza a matriz $\mathbf{A}$, ou seja, $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Cabe notar que se matriz $\mathbf{A}$ com dimensão $M \times M$ possui M autovalores distintos, então, essa matriz é diagonalizável. Porém, se os autovalores de $\mathbf{A}$ não forem distintos, ela será diagonalizável somente se os M autovetores forem linearmente independentes.

◊ Multiplicando (7) à direita por $\mathbf{V}^{-1}$, chega-se a

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}} \tag{9}$$

que é conhecida como decomposição em autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Essa decomposição é particularmente útil para resolver vários problemas de Engenharia. Por exemplo, ela pode ser usada na resolução de sistemas de equações diferenciais, como veremos na parte experimental.

◊ Nas aulas sobre rotações, a transformação desejada (a rotação) foi calculada essencialmente por meio de uma decomposição da matriz como a da Equação (9).

◊ Cabe lembrar que $\mathbf{A}\mathbf{x}$ transforma linearmente o vetor $\mathbf{x}$ no vetor $\mathbf{y}$. Além disso, a diagonalização dessa matriz corresponde a usar um novo sistema de coordenadas.

Exemplo

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz diagonal dos autovalores e as matriz de autovetores de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são dadas respectivamente por

$$\mathbf{D}_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Confira o resultado com o comando *eig* do MatLab. Lembre que os autovetores fornecidos pelo MatLab possuem norma unitária.

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem a mesma matriz de autovalores mas as matrizes de autovetores são diferentes. A matriz $\mathbf{A}$ possui dois autovetores linearmente dependentes $\mathbf{v}_{1A} = -\mathbf{v}_{2A}$, portanto, essa matriz não é diagonalizável. No entanto, a matriz $\mathbf{B}$ possui os autovetores linearmente independentes entre si, portanto, essa matriz é diagonalizável.

Especificamente, tanto a matriz $\mathbf{A}$ como a matriz $\mathbf{B}$ possuem autovalores com multiplicidade 2, ou seja, $\lambda_{1A} = \lambda_{2A}$ e $\lambda_{1B} = \lambda_{2B}$. Geometricamente a matriz $\mathbf{A}$ estica os vetores linearmente dependentes $\mathbf{v}_{1A}$ e $\mathbf{v}_{2A}$ por um fator 2 e apesar de $\lambda_{1A} = \lambda_{2A}$, ou seja, multiplicidade algébrica dos autovalores ser dois, a multiplicidade geométrica é um, pois os autovetores associados estão em um mesmo eixo. A matriz $\mathbf{B}$ também estica os vetores $\mathbf{v}_{1B}$ e $\mathbf{v}_{2B}$ por um fator 2, porém, como eles são linearmente independentes, a multiplicidade geométrica é dois.

4 Exercícios

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ indicadas a seguir. Responda os itens pedidos considerando cada uma dessas matrizes.

1. Determine os autovalores de $\mathbf{A}$ e os autovetores associados.

2. Com os autovalores e autovetores calculados verifique em cada caso se a igualdade $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ é válida.

3. Na tela de comandos do MatLab digite *eigshow*. O *eigshow* é uma demo em que são consideradas as matrizes desse exercício. Nessa demo é feita a projeção de um conjunto de vetores $\mathbf{x}$ nas colunas da matriz $\mathbf{A}$. Considere somente a opção *eig* do comando *eigshow*, a opção *svd* não será considerada nessa experiência. Entre os vetores $\mathbf{x}$ considerados na projeção estão os autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Justifique as projeções observadas na demo usando os autovalores e autovetores calculados para cada matriz $\mathbf{A}$ desse exercício. Para facilitar as suas justificativas observe se: (i) as matrizes são singulares ou não singulares, (ii) os autovalores são complexos, reais, nulos, e a sua multiplicidade.

1. $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} /4$

7. $\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} /4$

8. $\mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} /4$

10. $\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} /4$

11. $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} /4$

12. $\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} /4$