

CAVIDADES RESSONANTES

PSI3483 – Ondas Eletromagnéticas em
meios guiados

CAVIDADES RESSONANTES EM GUIA DE ONDAS

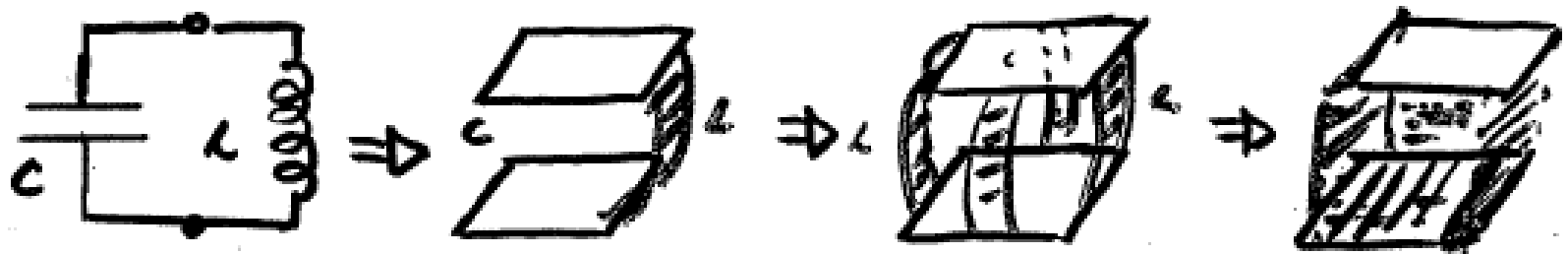
Conteúdo

- Cavidades retangulares
- Cavidades cilíndricas
- Índices de Mérito

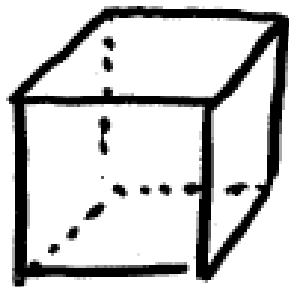
I - Introdução

- Aplicações de cavidades ressonantes
 - Filtros sintonizados
 - Osciladores
 - Fornos de micro-ondas
 - Amplificadores sintonizados

CIRCUITOS RESSONANTES



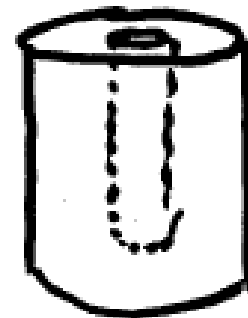
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \text{frequência } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



CAVIDADE
RETANGULAR

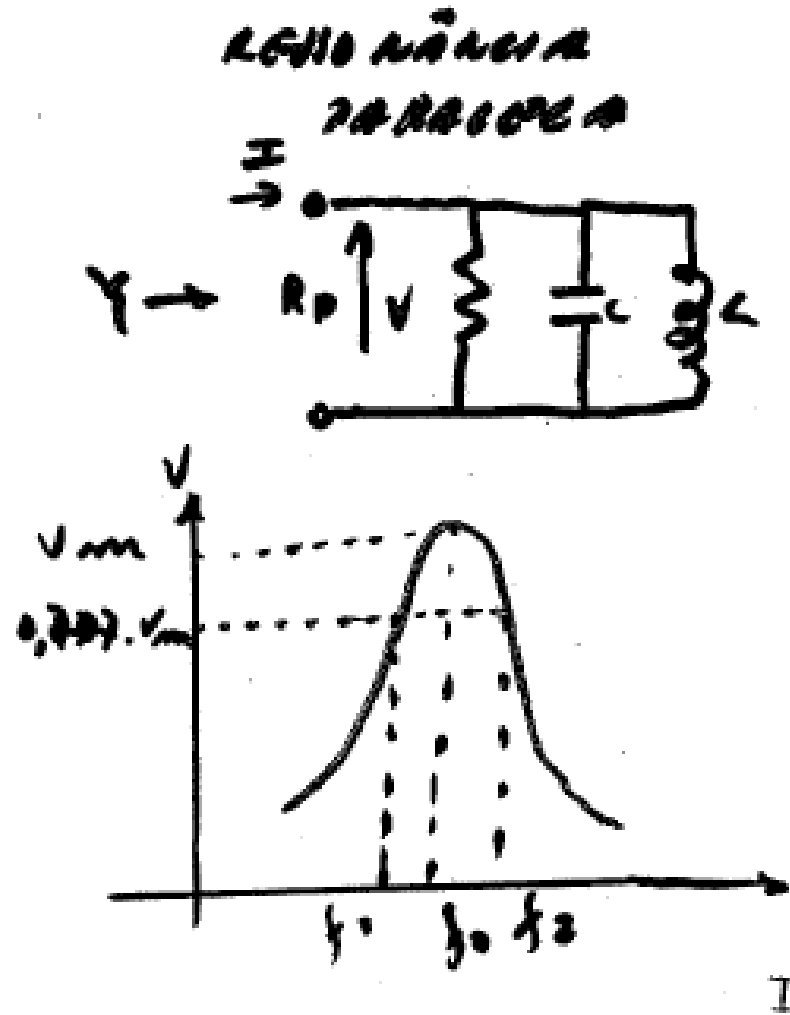
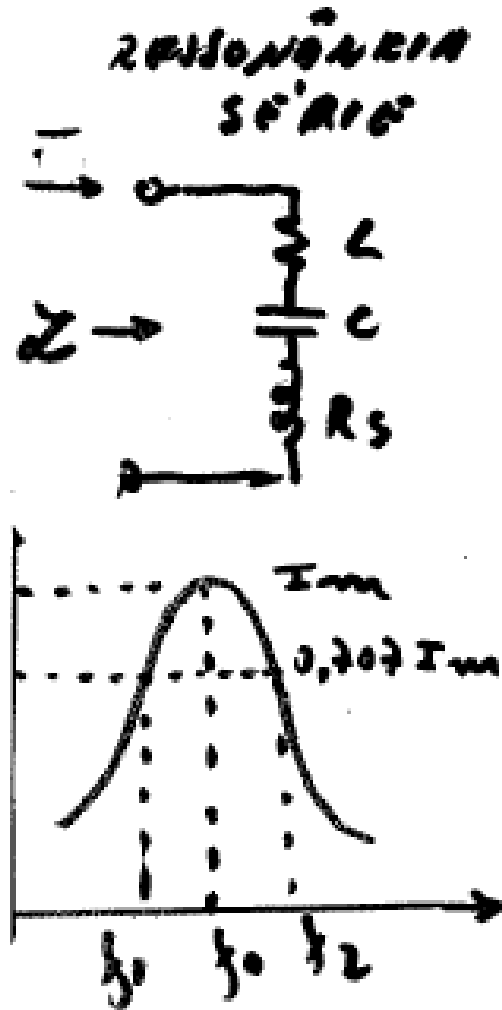


CAVIDADE
CILÍNDRICA



CAVIDADE
COAXIAL

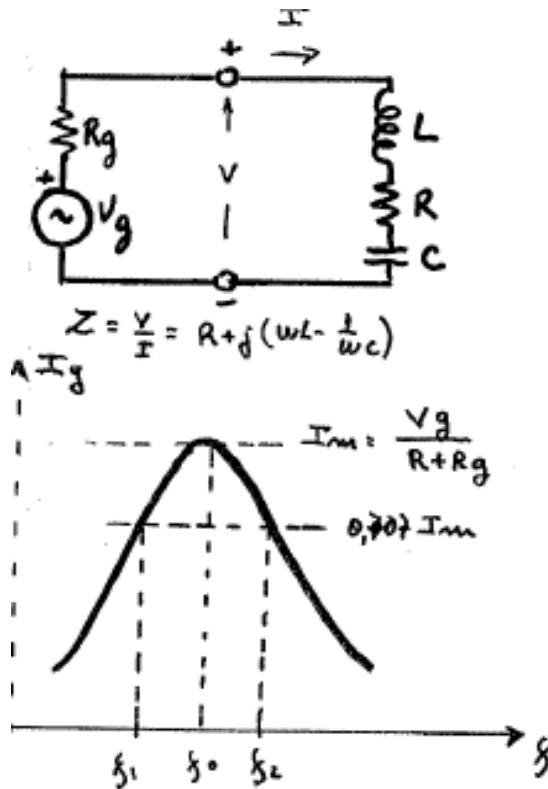
CIRCUITOS RESSONANTES



II - CIRCUITOS RESSONANTES – Noções

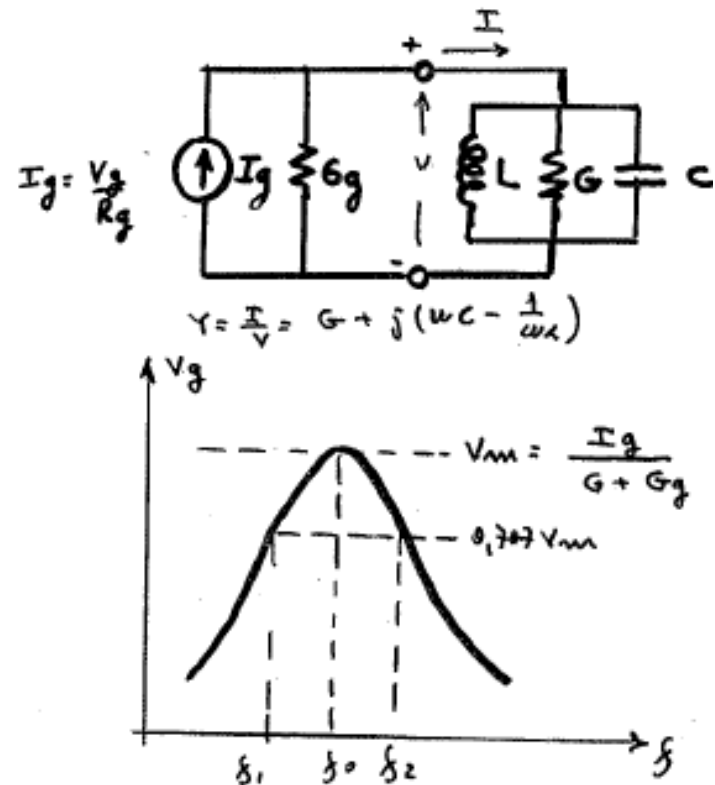
- Cavidades ressonantes podem ser representadas por dois tipos de circuitos ressonantes – série e paralelo

CIRCUITO SÉRIE



Frequência de ressonância

CIRCUITO PARALELO



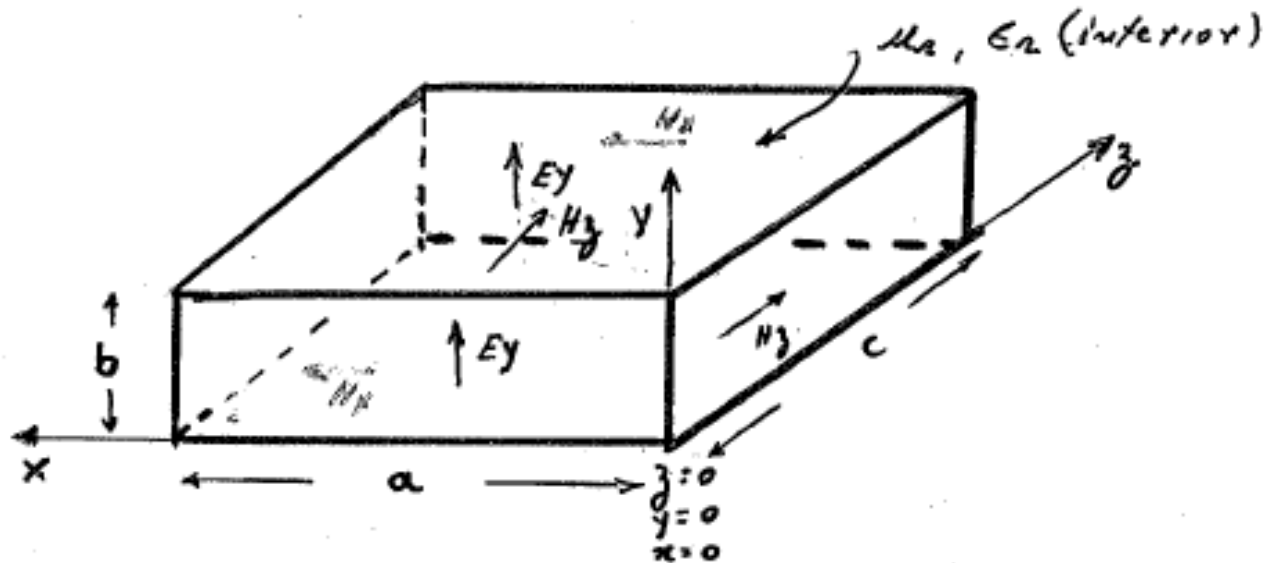
$$f_0 = f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

III – CAVIDADES RETANGULARES

- INTRODUÇÃO

Cavidades retangulares → guias retangulares com extremidades terminadas em curto-circuito

CAVIDADE RETANGULAR- coordenadas cilíndricas- $a \times b \times c$



III - CAVIDADES RETANGULARES

Componente E_y do modo fundamental (TE_{10}) que se propaga no guia de ondas retangular

$$E_y(x,y,z) = E_{y0+} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}_{\rightarrow \vec{x}} e^{-\gamma z} + E_{y0-} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}_{\rightarrow \vec{x}} e^{\gamma z}$$

Imaginando-se condutor e dielétrico perfeitos $\gamma = j\beta$

$$\begin{aligned} E_y(x,y,z) &= E_{y0+} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} + E_{y0-} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) (E_{y0+} e^{-j\beta z} + E_{y0-} e^{j\beta z}) \end{aligned}$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO - 1ª parede - $z=0$ - x -qual $E_{y0+} = -E_{y0-}$

$$\text{pois } E_y(x,y,0) = 0$$

2ª parede - $z=c$ - x -qual $E_y(x,y,c) = 0$

III - CAVIDADES RETANGULARES

- Aplicando a condição de contorno na segunda parede da cavidade $z = c$

$$EY(x, y, z) = (\epsilon y_{0+} e^{-j\beta z} - \epsilon y_{0+} e^{j\beta z}) \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$\begin{aligned} EY(x, y, z=c) &= \epsilon y_{0+} (e^{-j\beta c} - e^{j\beta c}) \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 0 \\ &= -2j \epsilon y_{0+} \text{sen}(\beta c) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soluções: } \beta c = p\pi \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad p \neq 0$$

Expressão geral

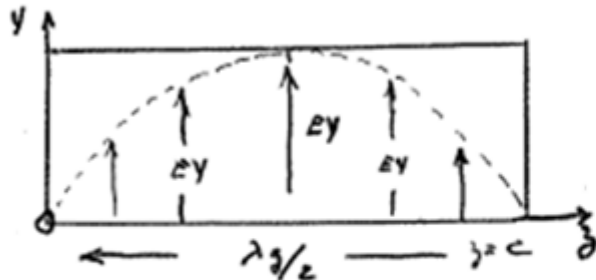
$$EY(x, y, z) = -2j \epsilon y_{0+} \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

Soluções - corte longitudinal - direção z

III - CAVIDADES RETANGULARES

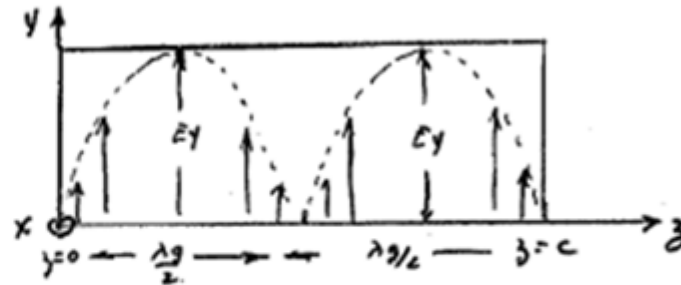
- Soluções – corte longitudinal na direção z

Modos TE_{10p}



Primeira ressonância - TE_{101}

$$\frac{\lambda_g}{2} = c$$



Segunda ressonância - TE_{102}

$$\lambda_g = c$$

É conhecido em guias retangulares que: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\left[1 - (f_c/f)^2\right]^{1/2}}$

Sendo f_r a frequência de ressonância

$$f_c/f_r = \lambda_r/\lambda_c$$

$$\text{Modo } TE_{101}: \lambda_g = \frac{\lambda_r}{\left[1 - (f_c/f)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_r^2} \cdot \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_c}\right)^2\right]^{1/2}} = 2c$$

III - CAVIDADES RETANGULARES

- Trabalhando-se a expressão, temos

$$\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 \quad \text{- para o modo } TE_{10} \quad \lambda_c = 2a$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \quad \text{- sabemos que } v = f_r \cdot \lambda_r = \frac{C}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad \text{III-}$$

- Frequência de ressonância do **Modo TE_{101}**

$$\text{A partir da expressão anterior } \left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

$$\text{e } f_r \cdot \lambda_r = \frac{C}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad \text{- (vel. da luz)} \quad \text{teremos}$$

$$\left(f_r\right)_{TE_{101}}^2 = \frac{C^2}{\mu_r \cdot \epsilon_r} \cdot \left[\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \right] \quad m=1 \quad n=0 \quad p=1$$

$$\text{FORMULA GERAL-}$$

$$\left(f_r\right)_{TE_{m,n,p}}^2 = \frac{C^2}{\mu_r \epsilon_r} \left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2c}\right)^2 \right]$$

III - CAVIDADES RETANGULARES

- A seguir, vamos deduzir para o caso geral
 - Modos $TE_{m,n,p}$ e $TM_{m,n,p}$
- Equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

III - CAVIDADES RETANGULARES

Expressões gerais dos modos TE e TM

- A partir das Equações de Onda obtemos em coordenadas retangulares

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (2)$$

- Modos $TE_{m,n,p}$ por definição: $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$
- Usamos a equação para $H_z \neq 0$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \quad (3)$$

- Com o auxílio da técnica de separação de variáveis

$$H_3 = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = X \cdot Y \cdot Z \neq 0$$

Obtemos de (3)

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$-k_x^2 \quad \quad \quad -k_y^2 \quad \quad \quad -k_z^2 \quad + k^2 = 0$$

$$\text{Logo } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\text{Soluções} \rightarrow \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 : X(x) = A \cdot \cos(k_x x) + B \cdot \sin(k_x x)$$

Condições de contorno nas 6 paredes da cavidade

$$x = 0 \text{ e } x = a : \frac{\partial H_3}{\partial x} = k_y y = 0 : B = 0 \text{ e } k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$y = 0 \text{ e } y = b : \frac{\partial H_3}{\partial y} = k_x x = 0 : D = 0 \text{ e } k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$z = 0 \text{ e } z = c : H_3 = 0$$

EXPRESSION GERAL. H_z - MODOS $TE_{m,n,p}$

Como sabemos importante $H_z = X \cdot Y \cdot Z \neq 0$

e pelas condições de contorno nas 6 paredes da cavidade

$$\begin{array}{lll} B=0 & k_x = \frac{m\pi}{a} & m=0,1,2,\dots \\ D=0 & k_y = \frac{n\pi}{b} & n=0,1,2,\dots \\ & k_z = \frac{p\pi}{c} & p=1,2,3,\dots, p \neq 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} m+n \neq 0$$

Obtemos para $H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$

Para a obtenção das frequências de ressonância, retomamos a expressão anterior.

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0 \quad \therefore k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega_n^2 \mu \epsilon$$

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 = (2\pi f_n)^2 \mu \epsilon$$

$$(f_n)_{TEm,n,p} = \frac{c}{2\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \cdot \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Durante as deduções nos guias retangulares, tivemos
 adotado $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad \therefore \quad k_c^2 + k_z^2 = k^2$ (condições)

Continuando a adotar esse mesmo critério é
 possível expressar todas as componentes dos campos
 elétrico e magnético $[E_x, E_y, H_x \text{ e } H_y]$ a partir
 das equações de Maxwell.

$$E_x = -j\omega\mu \cdot \frac{\delta H_z}{\delta y} \quad , \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\delta^2 H_z}{\delta x^2}$$

$$H_x = -\frac{k_z}{k_c^2} \cdot \frac{\delta H_z}{\delta x} \quad , \quad H_y = -\frac{k_z}{k_c^2} \cdot \frac{\delta H_z}{\delta y}$$

MODOS $TE_{m,n,p}$ - EXPRESSÕES GERAIS

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

$$E_x = j\frac{\omega\mu}{k_c^2} \cdot k_x \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

$$E_y = j\frac{\omega\mu}{k_c^2} \cdot k_y \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

$$H_x = -\frac{k_z \cdot k_x}{k_c^2} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

$$H_y = -\frac{k_z \cdot k_y}{k_c^2} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

Apresentar as equações de onda e determinar as
 equações de cada campo (elétrico ou magnético)
 em cada modo, observando $\Rightarrow m=0,1,2,\dots$ $n=0,1,2,\dots$ $p=0,1,2,\dots$

MODOS $TE_{m,n,p}$ - $E_z \neq 0$ e $H_z = 0$

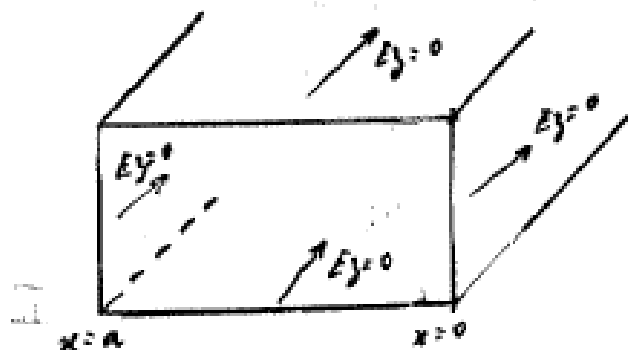
de maneira análoga aos $TE_{m,n,p}$ podemos resolver a
 equação de onda - $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$

com as condições de contorno impostas pelas as 6 paredes
 temos

$$E_z(x,y,z) = E_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

$$m, n \neq 0$$

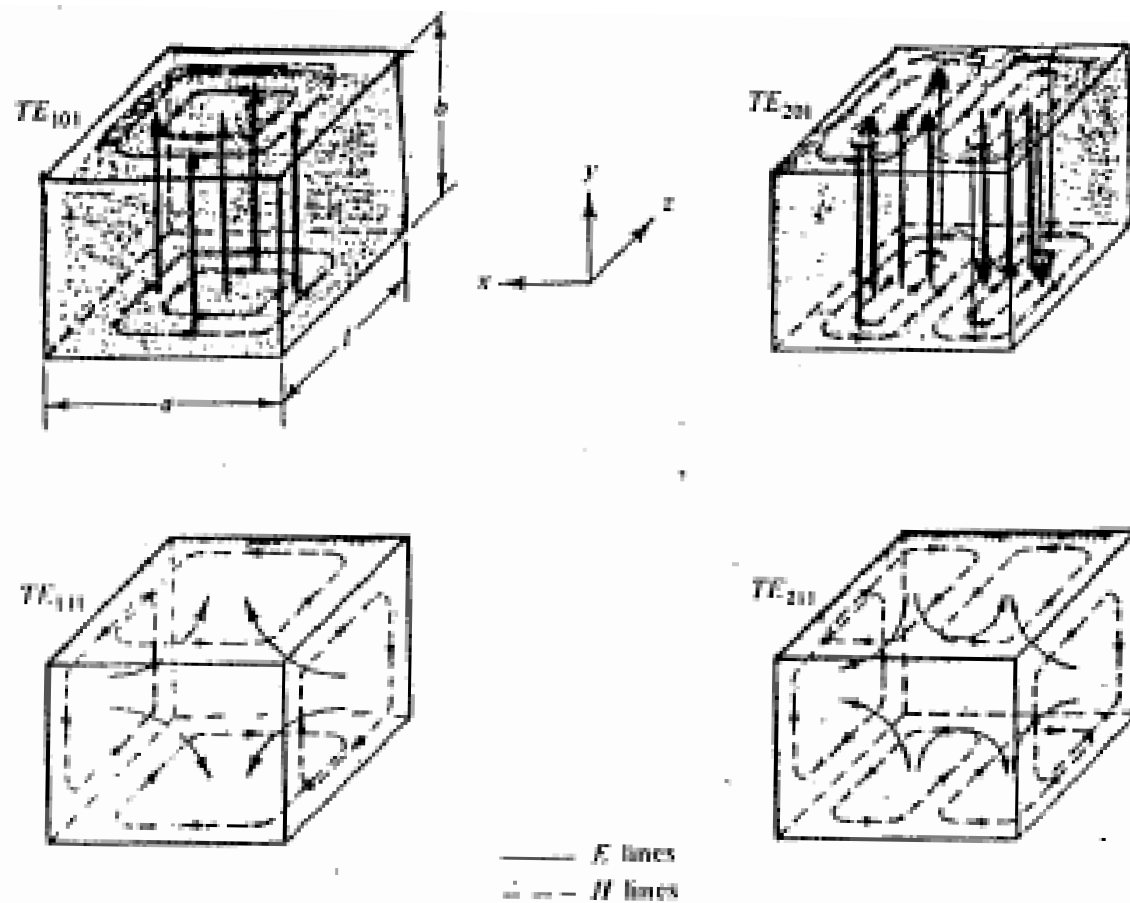
$$p = 0, 1, 2, 3, \dots$$



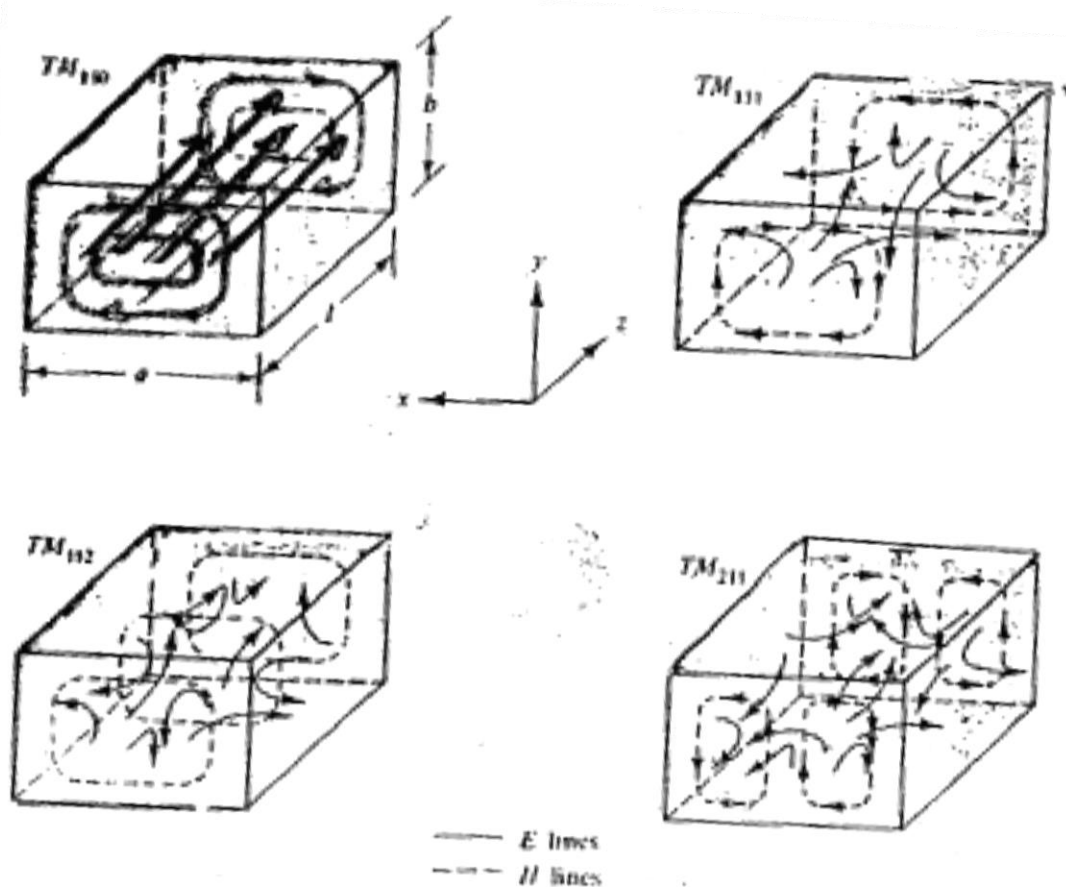
Parede da frente $z=0$

" da traseira $z=c$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

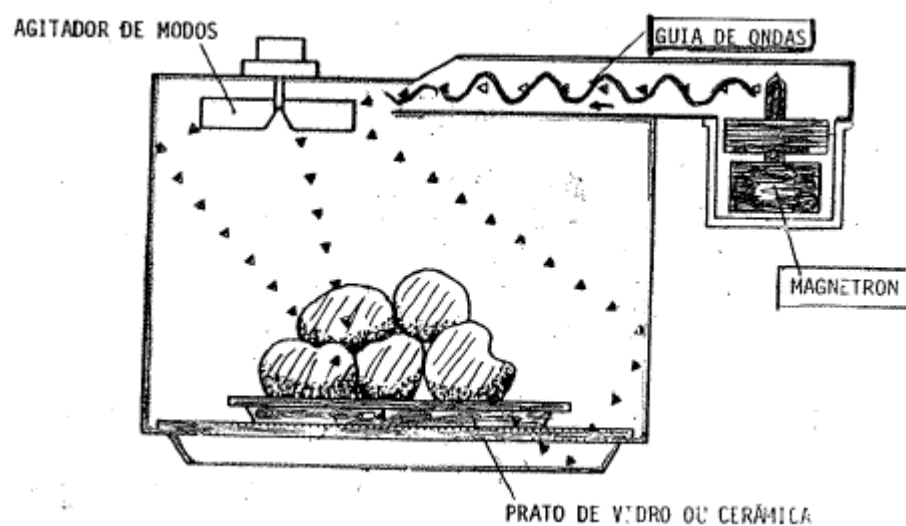
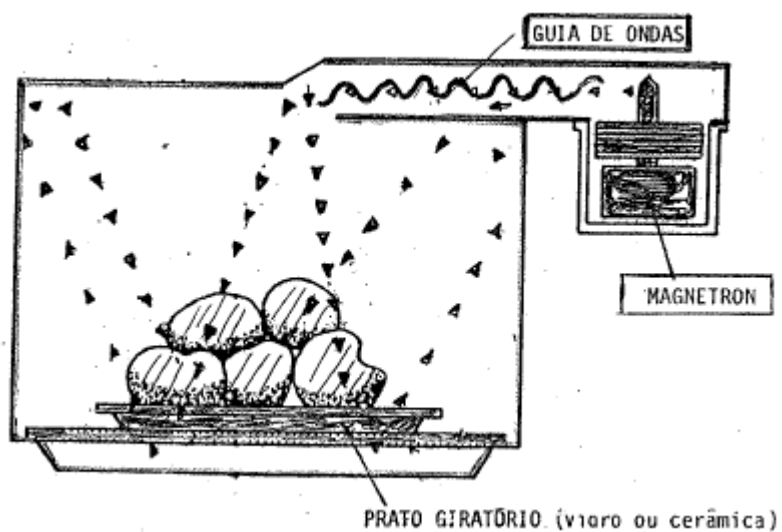


Field patterns for some TE_{mnp} modes in a rectangular cavity.
 (Note: The E and H fields are 90° out-of-phase.)



Field patterns for some TM_{mnp} modes in a rectangular cavity.
 (Note: The E and H fields are 90° out-of-phase.)

FORNOS DE MICRO-ONDAS – Visão geral



FORNOS DE MICRO-ONDAS – Exemplo

Cavidade do forno: cubo com $a = b = c = 43,2$ cm

$$f_0 = 15 \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} = \frac{15}{a} \sqrt{(m)^2 + (n)^2 + (p)^2}$$

para o intervalo $2,4 \text{ GHz} < f_0 < 2,5$

$$\left(\frac{2,4 \cdot 43,2}{15}\right)^2 \leq m^2 + n^2 + p^2 \leq \left(\frac{2,5 \cdot 43,2}{15}\right)^2$$

$$47,7 \leq m^2 + n^2 + p^2 \leq 51,84$$

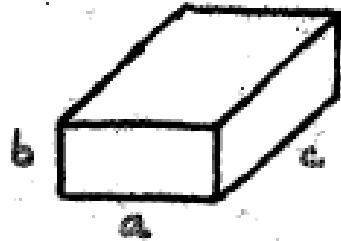
FORNOS DE MICRO-ONDAS – Exemplo

$$47,7 \leq m^2 + n^2 + p^2 \leq 51,84$$

$m =$	2	1	2	1	3	5	1	1	5	9
$n =$	4	3	3	1	4	0	0	1	1	6
$p =$	5	6	6	4	5	5	7	7	5	0
$m^2 + n^2 + p^2 =$	45	46	49	48	50	50	50	51	51	52

$m =$	3	3	6	6	2	3	4	3	5	5	5
$n =$	2	6	3	2	6	4	3	5	4	3	0
$p =$	6	2	2	3	3	5	5	4	3	4	5
$m^2 + n^2 + p^2 =$	49	49	49	49	49	50	50	50	50	50	50

Cavidades Retangulares – frequências de ressonância



$$b \leq a \leq c$$

1º caso -

$$a = b = c \quad \text{cubo}$$

$$TE_{101} \quad (f_r)_{101} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[2 \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot \sqrt{2}$$

$$TE_{011} \quad (f_r)_{011} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} TM_{110} \\ \end{array} \right\} (f_r)_{110} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot \sqrt{2}$$

Cavidades Retangulares – frequências de ressonância

- Relação entre frequências de ressonância para **$a = b = c$**

TE_{111} TM_{111}

$$(f_1)_{111} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 \right]^{1/2} = \frac{v}{2a} \sqrt{3} = 1.22 (f_1)_{101} = 1.22 (f_1)_{101}$$

	TE_{101}	TE_{011}	TM_{111}	$\frac{TM_{111}}{TE_{111}}$	TE_{102}
$\frac{(f_1)_{111}}{(f_1)_{101}}$	1	1	1	1.22	1.58

Cavidades Retangulares – frequências de ressonância

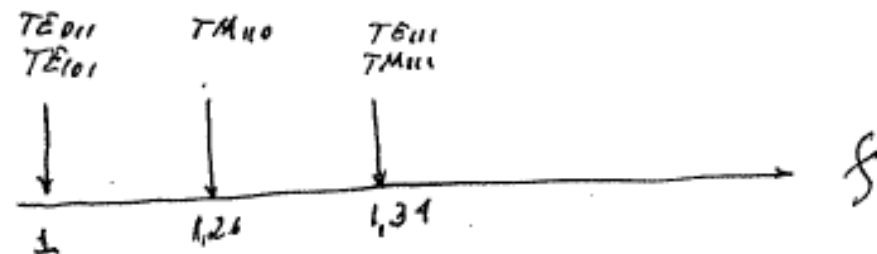
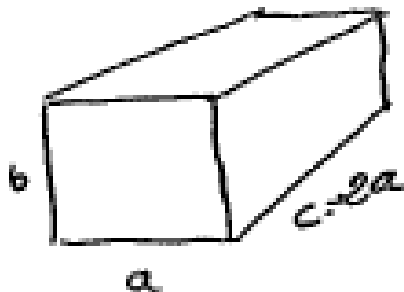
- Relação entre frequências de ressonância para **$a = b$** e **$c = 2a$**

$$(f_1)_{TE_{101}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{0}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(f_1)_{TE_{101}} = \frac{v}{2a} \sqrt{\frac{5}{4}} = (f_1)_{TE_{011}} = \frac{v}{2a} \cdot 1,118$$

$$(f_2)_{TM_{110}} = \frac{v}{2a} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 + 0 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \sqrt{2} = \frac{v}{2a} \cdot 1,414$$

$$(f_3)_{TE_{111}} = (f_3)_{TM_{111}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{v}{2a} \cdot 1,5$$



Cavidades Retangulares – frequências de ressonância

- Relação entre frequências de ressonância para **$a = 2b$** e **$c = a$**

$$TE_{101} = (f_r)_{101} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \sqrt{2}$$

$$TE_{011} = (f_r)_{011} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{2}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} [5]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot 1,19$$

$$TM_{110} = (f_r)_{110} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot 2,24$$

$$= \frac{v}{2a} \cdot 1,29$$

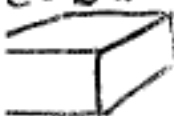
$$TE_{111} > (f_r)_{111} = \frac{v}{2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{2a} \cdot \sqrt{6}$$

	TE_{101}	TE_{011}	TM_{110}	TE_{111} TM_{111}	TE_{102}
$\frac{(f_r)_{101}}{(f_r)_{101}}$	1	1,58	1,58	1,73	1,58

Cavidades Retangulares – frequências de ressonância

- Relação entre frequências de ressonância

$\xrightarrow{\text{FREQUÊNCIA}}$

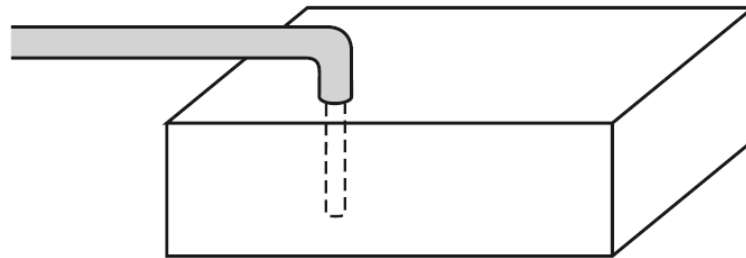
	f_r	f_r	f_r
$b < a$ $c = c$ 	TE_{101} TE_{011} TM_{110} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{2}$	TE_{111} TM_{111} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{3}$	
$b = 0$ $c = 2a$ 	$TE_{101} - TE_{011}$ $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{5}$	TM_{110} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{2}$	TE_{111} TM_{111} $f_r = 1.34 f_{r101}$
$a = 2b$ $c = 2a$ 	TE_{101} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{2}$	TE_{011} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{5}$	TM_{110} $f_r = \frac{v}{2a} \sqrt{6}$

MODOS DE EXCITAÇÃO DAS CAVIDADES

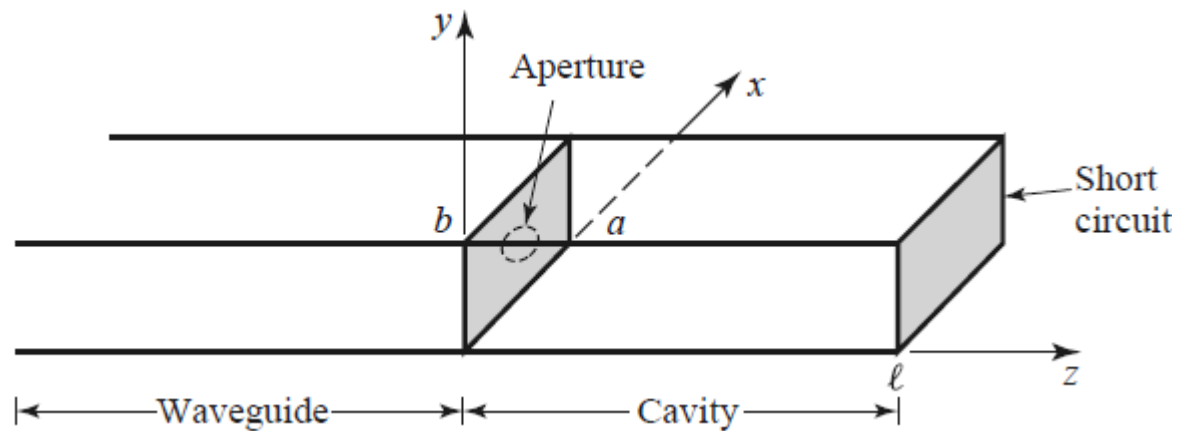
Cavidades Retangulares

- Formas de excitação da cavidade

Sonda coaxial



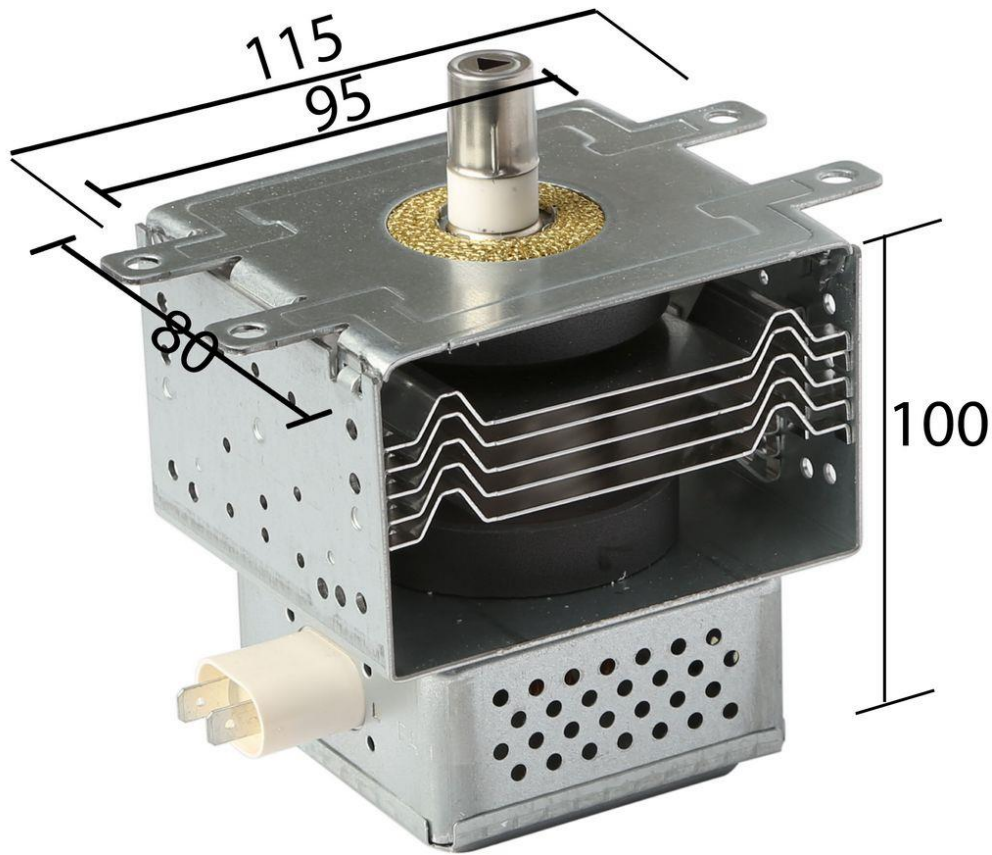
Iris de
acoplamento





Cavidades Retangulares – Válvula do forno de micro-ondas

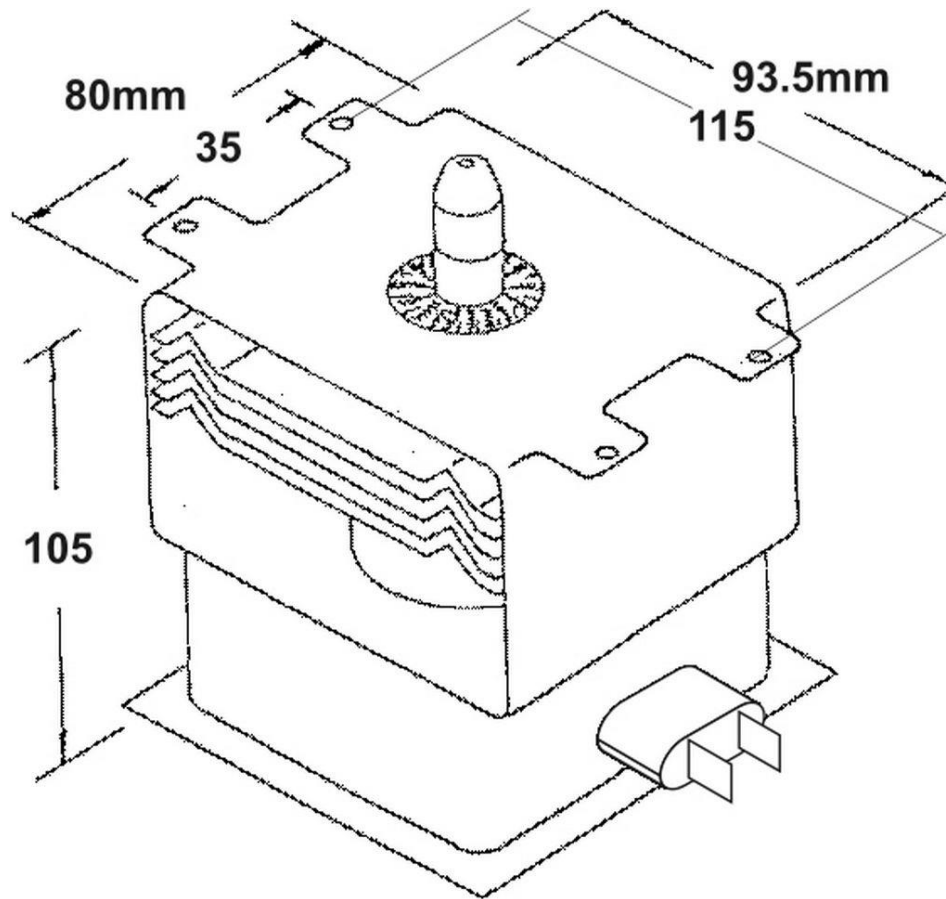
EXEMPLO: PANASONIC INVERTER TYPE **MAGNETRON**





Cavidades Retangulares – Válvula do forno de micro-ondas

EXEMPLO: PANASONIC INVERTER TYPE **MAGNETRON**



Watts	850
Freq.	2458MHz
FV	3.15V
PAV	4000V
PAI	300mA
Equiv.	Dae-Woo & Sanyo.
Code	AM741

Cavidades Retangulares

- Modo TE_{101} - componentes dos campos E e H

$$\frac{E_{y+}}{H_{x+}} = -Z_{TE} \quad \text{e} \quad \frac{E_{y-}}{H_{x-}} = Z_{TE}$$

$$H_x = H_{x+} + H_{x-}$$

$$Z_{TE} = j \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\omega \mu}{\beta}$$

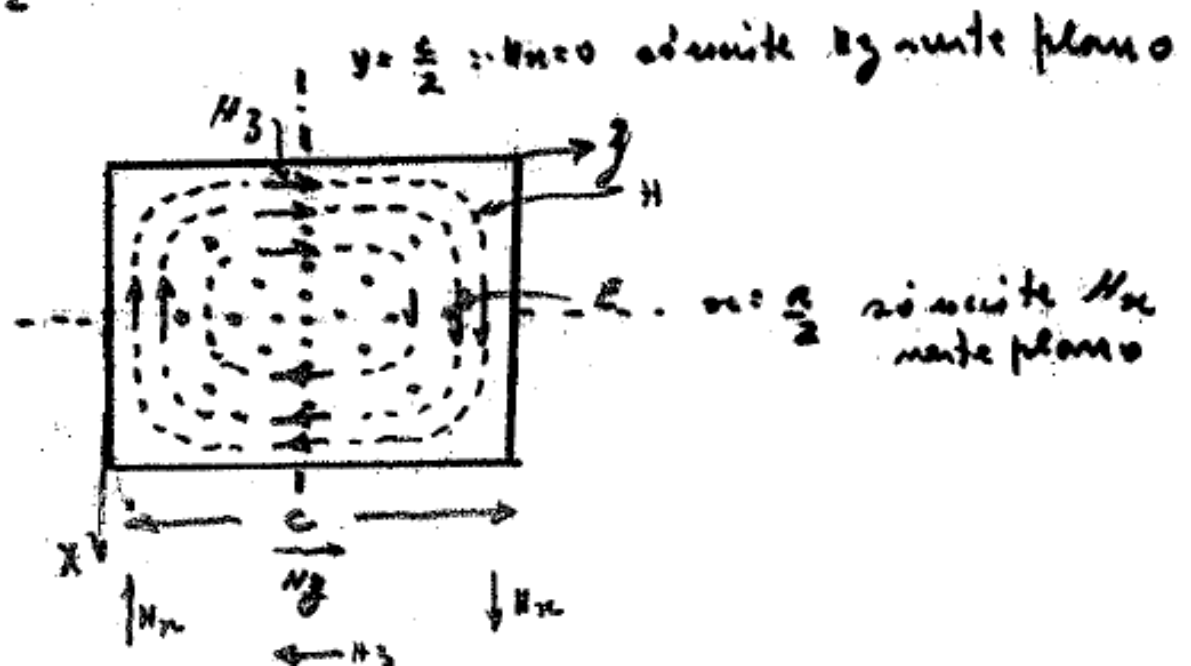
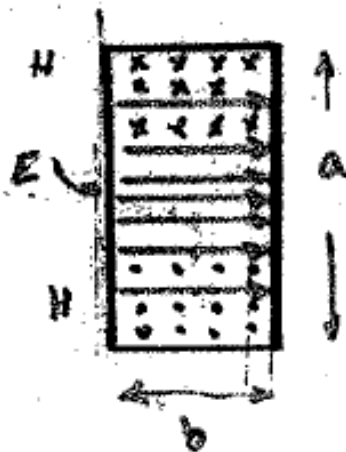
$$H_x = -\frac{E_{y+}}{Z_{TE}} + \frac{E_{y-}}{Z_{TE}} = -\frac{1}{Z_{TE}} [E_{y+} - E_{y-}]$$

$$H_x = -\frac{1}{Z_{TE}} [E_{y0+} e^{-j\beta z} - E_{y0-} e^{j\beta z}] \sin\left(\frac{\pi}{a} a\right)$$

Cavidades Retangulares

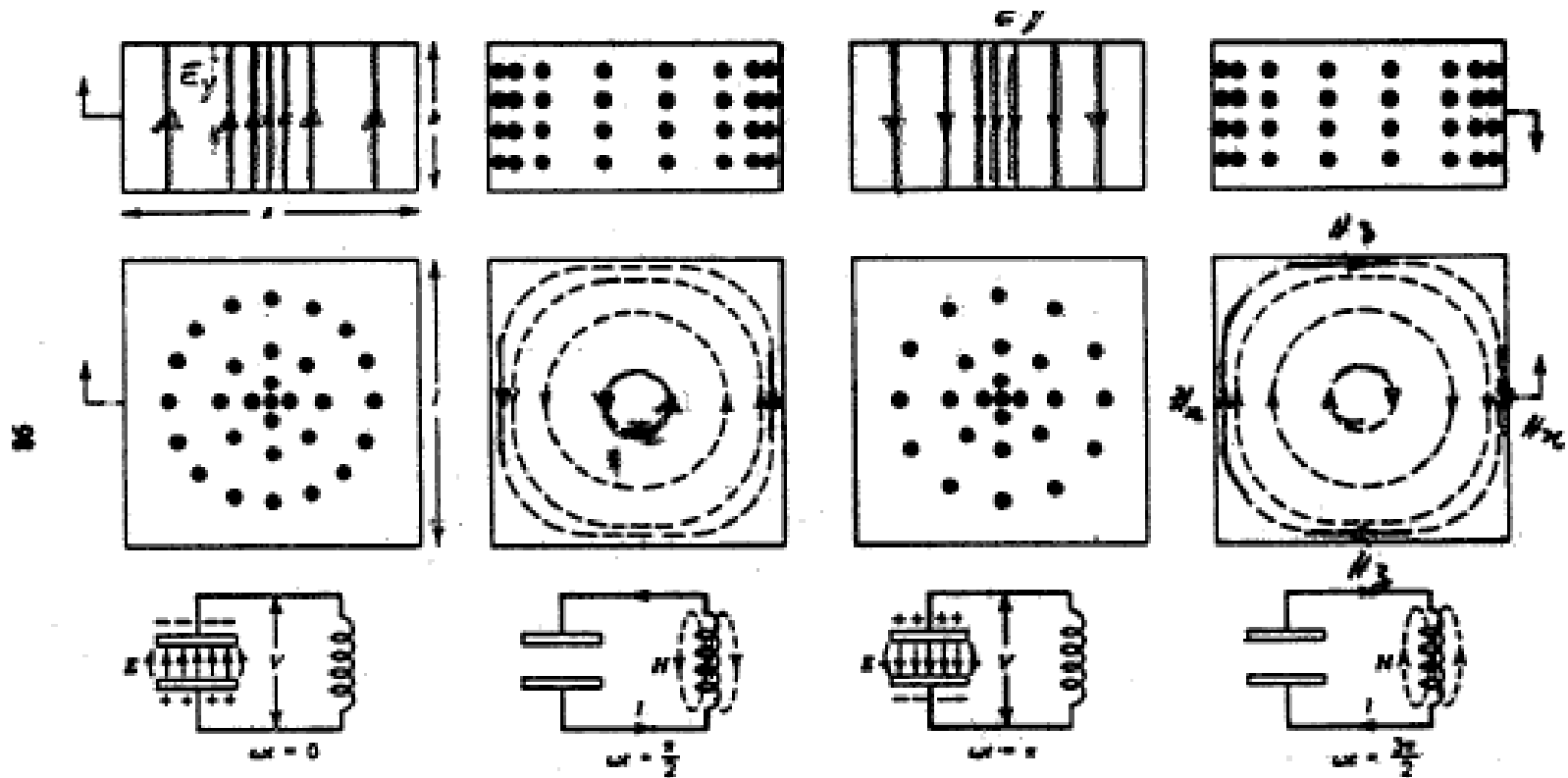
- Modo TE_{101} - componentes dos campos E e H

$$H_n = -\frac{2\epsilon_0 \cdot a}{\eta \sqrt{a^2 + c^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{c}z\right)$$



Cavidades Retangulares

- Analogia entre campos E e H da cavidade em guia retangular e tensões e correntes de ressoador LC



Cavidades Retangulares - Índice de Mérito (Fator de Qualidade)

- Definições de Índice de Mérito $\rightarrow$ em $\omega = \omega_r$
 - Q_u - índice de mérito não-carregado

$$Q_u = \omega_r \frac{\text{Energia armazenada no circuito ressonante}}{\text{Potência média dissipada no circuito ressonante}}$$

- Modelo RLC série

$$Q_u = \frac{\omega_r \cdot L}{R}$$

- Modelo RLC paralelo

$$Q_u = \frac{\omega_r \cdot C}{G}$$

- Q_E - índice de mérito externo

$$Q_E = \omega_r \frac{\text{Energia armazenada no circuito ressonante}}{\text{Potência média dissipada no circuito externo}}$$

- Modelo RLC série

$$Q_E = \frac{\omega_r \cdot L}{R_g}$$

- Modelo RLC paralelo

$$Q_E = \frac{\omega_r \cdot C}{G_g}$$

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito

- Q_L - *índice de mérito carregado*

$$Q_L = \omega_r \frac{\text{Energia armazenada no circuito ressonante}}{\text{Potência média dissipada no circuito ressonante}}$$

- Modelo RLC série

- Modelo RLC paralelo

$$Q_E = \frac{\omega_r \cdot L}{R_g + R}$$

$$Q_E = \frac{\omega_r \cdot C}{G_g + G}$$

Q_L depende do acoplamento entre o circuito ressonante e o circuito externo

- Relações entre os índices de mérito

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_E} + \frac{1}{Q_U} \quad \text{e} \quad Q_L = \frac{f_r}{f_2 - f_1} = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\text{frequência de ressonância}}{\text{Banda de 3 dB}}$$

f_1 e f_2 - frequências em que a tensão cai a 0,707 do máximo e a potência a 3 dB do máximo

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{10p}

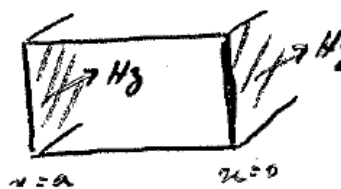
- Índice de mérito não carregado – modos TE_{10p}

$$Q_L = \omega_r \frac{\text{Energia armazenada no circuito ressonante}}{\text{Potência média total dissipada}} = \omega_r \frac{W_E}{P_d}$$

- Considerando cavidade com paredes metálicas feitas com condutores reais com resistência superficial R_s

$$P_d = \frac{R_s}{2} \int_{\text{paredes}} |H_z|^2 \cdot ds$$

- Calcula-se P_d em cada uma das 6 paredes da cavidade ressonante
- Em cada parede lateral $\rightarrow H_z = H_t$



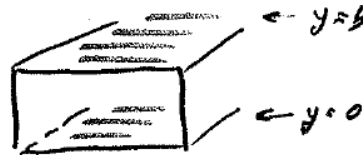
$$P_d = \frac{1}{2} R_s \int |H_z|^2 \cdot ds = \frac{1}{2} R_s \int_0^b \int_0^c H_0^2 \cdot \rho_m^2 \left(\frac{\rho}{\epsilon} \pi z \right) \cdot dy \cdot dz = \frac{R_s}{2} H_0^2 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

- Considerando duas paredes laterais $\rightarrow P_d = \frac{R_s}{2} H_0^2 b \cdot c$

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{10p}

- Paredes superior e inferior

$$|H_z|^2 = |H_x|^2 + |H_y|^2$$



$$P_d = R_s H_0^2 \left(\frac{k_z}{k_n} \right)^2 \int_0^a \int_0^c \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{c}z\right) dx dz + R_s H_0^2 \int_0^a \int_0^c \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{c}z\right) dx dz$$

$$= \frac{H_0^2 R_s}{2} a^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} \right) \right]$$

- Paredes anterior e posterior



$$P_d = \frac{R_s}{2} a^2 H_0^2 \left[\frac{a \cdot b}{c^2} \right]$$

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{10p}

- Potência média total nas seis paredes

$$P_d = \frac{R_s}{2} \cdot a^2 \cdot H_0^2 \left[\frac{a \cdot b}{c^2} + \frac{b \cdot c}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \right]$$

- Energia armazenada no campo elétrico

$$W_E = \frac{\epsilon}{2} \int_{\text{volume}} |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{\epsilon}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV \quad \text{com } E_y = H_0 \sin(\dots) \sin(\dots)$$

$$W_E = \frac{H_0^2 \cdot \epsilon}{2} \left(\frac{\eta f_r}{f_c} \right) \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4}$$

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{101}

- Índice de mérito não-carregado do modo TE_{101}

$$Q_U = \frac{W_r \cdot W_e}{P_d} = \frac{(2\pi f_r)^2 \left[\frac{\mu_0 \epsilon}{2} \left(\frac{n f_r}{f_c} \right) \frac{a b c}{4} \right]}{\frac{R_s}{2} \cdot a^2 \cdot \mu_0^2 \left[\frac{a b}{c^2} + \frac{b c}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \right]}$$

$$Q_U = \frac{\pi \eta}{4 R_s} \left[\frac{2 b (a^2 + c^2)^{3/2}}{a c (a^2 + c^2) + 2 b (a^3 + c^3)} \right] = \frac{2\pi \eta}{\lambda_n R_s} \left[\frac{\text{volume}}{\text{Área da Superfície}} \right]$$

Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{101}

- Primeiro exemplo: cavidade cúbica: $a = b = c$

$$Q_U = \frac{\sigma \eta \sqrt{2}}{R_s} \quad \text{— ar e cobre} \quad \sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m} \\ R_s = 2,6 \times 10^{-2} \Omega$$

Paredes de cobre, modo TE_{101} , $f_r = 10 \text{ GHz} \rightarrow Q_U = 10.737$

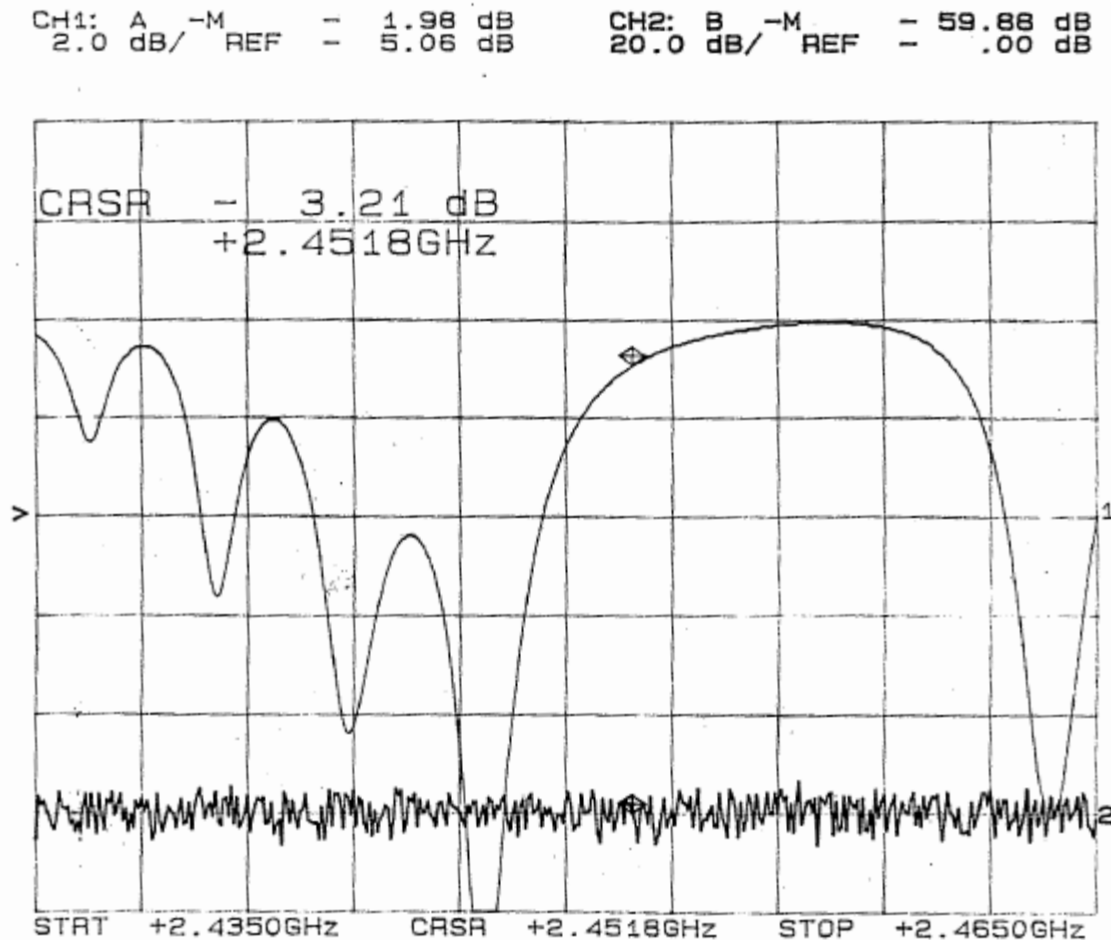
- Segundo exemplo: cavidade retangular $a = 2b$ e $a = c$

$$Q_U = \frac{\sigma \eta}{2 R_s} \cdot \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{2 + \frac{a}{b}}$$

Paredes de cobre, modo TE_{101} , $f_r = 10 \text{ GHz} \rightarrow Q_U = 8.052$

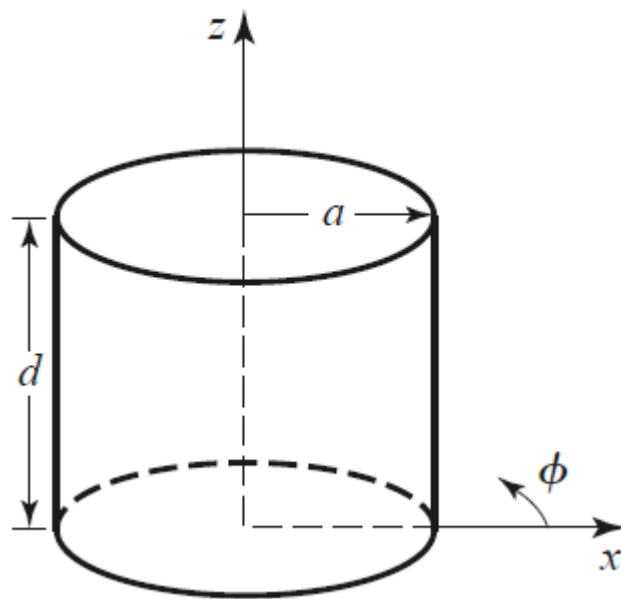
Cavidades Retangulares - Índice de Mérito – modos TE_{101}

- S_{11} x frequência – forno de micro-ondas com frasco de pirex



Cavidades Cilíndricas

- Modos $TE_{n,l,p} \rightarrow H_z \neq 0$ e $E_z = 0$



- Modos idênticos aos da cavidade cilíndrica
- Parte-se da equação de $H_z(r, \phi)$ de guias cilíndricos com propagação segundo a direção z

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Tem-se

$$H_z(r, \phi) = H_0 \cdot J_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad \text{com } k_c = \frac{\beta'_{m,l}}{a} \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ l = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

- Para propagação segundo z, obtém-se

$$H_z(r, \phi, z) = H_0 \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\phi) [H_{0+} \cdot e^{-j\beta z} + H_{0-} \cdot e^{j\beta z}]$$

- Impondo-se curto-circuitos em $z = 0$ e em $z = d$,
 - Condições de contorno para o campo H_z na cavidade cilíndrica

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Primeira equação

$$\frac{R}{R} \left[\frac{\delta R}{\delta r} + r \frac{\delta^2 R}{\delta r^2} \right] + r^2 k_c^2 - \eta^2 = 0 \quad \times \frac{R}{r^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\delta R}{\delta r} + \frac{\delta^2 R}{\delta r^2} + R k_c^2 - \frac{\eta^2 R}{r^2} = 0$$

$$\frac{\delta^2 R}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta R}{\delta r} + \left(k_c^2 - \frac{\eta^2}{r^2} \right) R = 0 \quad - \text{solução e'}$$

equação de Bessel - soluções.

$$R = F \cdot J_n(k_c r) + G \cdot Y_n(k_c r)$$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Segunda equação $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + n^2 \phi = 0$

Solução $\phi = G \cdot \cos(n\phi) + D \cdot \sin(n\phi)$

- Condições de contorno
- No centro da cavidade ($r = 0$), H_z é finito

- Como $N_m(0) \rightarrow \infty$, então $G = 0$ e $\phi = F \cdot \sin(k_c r)$

- $\phi = G' \cdot \cos(n\phi) + D' \cdot \sin(n\phi)$ deve ter o mesmo valor a cada rotação, e assim podemos considerar

$$\phi = G'' \cdot \cos(n\phi)$$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Assim, temos

$$H_z = C' \cos(n\phi) \cdot F \cdot J_n(k_c r) \cdot [A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)]$$

- Para

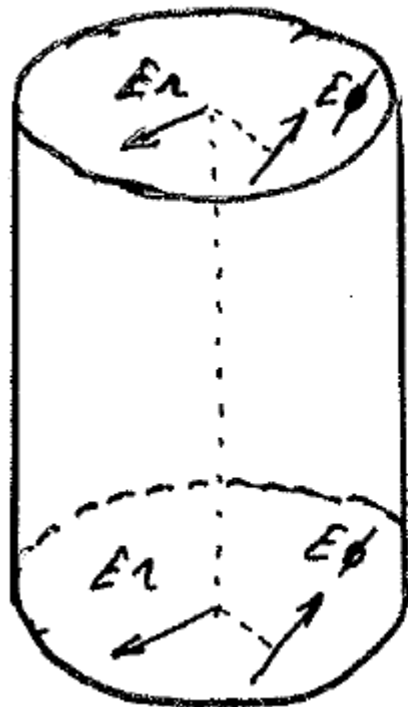
$$\begin{aligned} z=0 &\rightarrow H_z=0 \text{ logo } A=0 \\ z=d &\rightarrow H_z=0 \text{ logo } k_z = \frac{p\pi}{d} \therefore p=1,2,\dots \end{aligned}$$

- Campo ressonante H_z

$$H_z(n,p,z) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) \cdot \sin(k_z z)$$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Condições de contorno



← PLANO $z = L \rightarrow E_\phi = 0$ mas $E_\phi = -j\omega\mu \frac{\delta H_z}{k_c^2 \delta r} = 0$

$\rightarrow E_r = 0$ mas $E_r = -j\omega\mu \frac{\delta H_z}{k_c^2 \delta \phi} \frac{1}{r} = 0$

← PLANO $z = 0$ $\rightarrow E_\phi = 0$ devido a $\frac{\delta H_z}{\delta r} = 0$
 $\rightarrow E_r = 0$.. $\therefore \frac{1}{r} \frac{\delta H_z}{\delta \phi} = 0$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Condição de contorno para o plano inferior, $z = 0$

$$\frac{H_z}{r} = 0! \quad H_z = \text{cte} = 0$$

$$\therefore H_z(r, \phi, 0) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) \cdot [H_{0+} e^{-j\beta_0 z} + H_{0-} e^{+j\beta_0 z}]$$

$$H_{0+} = -H_{0-}$$

$$H_z(r, \phi, z) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) [H_{0+} e^{-j\beta_0 z} - H_{0+} e^{+j\beta_0 z}]$$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Condição de contorno para o plano superior, $z = d$

$$H_z(r, \phi, z=d) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) [H_{0+} \cdot e^{-j\beta d} - H_{0+} \cdot e^{j\beta d}]$$

$$H_z(r, \phi, d) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) \cdot H_{0+} (-2j \sin \beta d)$$

$$\text{logo } \beta d = p\pi \therefore \beta = \frac{p\pi}{d} \quad p=1, 2, \dots$$

$p \neq 0$

- Expressão geral para o modo $TE_{n,l,p}$

$$H_z(r, \phi, z) = H_0 \cdot J_n(k_c r) \cdot \cos(n\phi) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$$

$$n=0, 1, 2, \dots \quad l=1, 2, 3, \dots \quad p=1, 2, 3, \dots$$

$$TE_{n,p} \rightarrow k_c = \frac{p\pi}{a} = \frac{1,841}{a}$$

Cavidades Cilíndricas

- Das equações anteriores pode-se deduzir a relação

$$k_c^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

- Frequências de ressonância do modo $TE_{n,l,p}$

$$k_c^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\left(\frac{p'_{m,l}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = \omega^2 \mu \epsilon = (2\pi f)^2 \mu \epsilon$$

$$f^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[\left(\frac{p'_{m,l}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2\pi d}\right)^2 \right]$$

$$\left(f\right)_{TE_{n,l,p}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \left[\left(\frac{p'_{m,l}}{\pi D}\right)^2 + \left(\frac{p}{2d}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad p = 1, 2, \dots$$

Cavidades Cilíndricas

- Frequências de ressonância – 1º. caso

$$\text{1º. caso. } \frac{d}{a} = 0,5 : \frac{a}{d} = 2$$

$$\text{ou } \frac{2a}{d} = 4$$



- Modo TM_{010} - modo dominante

- $p_{n,l} = p_{0,1} = 2,4$

$$(f_r)_{TM_{010}} = \frac{c}{2\pi a} \left[(2,40)^2 + \left(\frac{p_d}{d} \cdot a \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c}{2\pi a} [(2,40)] = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$$

Cavidades Cilíndricas

- Frequências de ressonância – 1º. caso

1º. caso. $\frac{d}{a} = 0,5 \Rightarrow \frac{a}{d} = 2$
 ou $\frac{2a}{d} = 4$



- Modo TE_{111}

- $p'_{n,l} = p'_{1,1} = 1,84$

$$(k_c)_{TE_{111}} = \frac{c}{2\pi a} \left[(1,84)^2 + \left(\frac{1,2}{d} \cdot a \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{c}{2\pi a} \left[(1,84)^2 + (2,2)^2 \right]^{1/2} = \frac{c}{2\pi a} \cdot 6,5$$

$$(k_c)_{TE_{111}} = 2,72 (k_c)_{TE_{101}}$$

Cavidades Cilíndricas

- Frequências de ressonância – 1º. caso

1º. caso. $\frac{d}{a} = 0,5 \Rightarrow \frac{a_1}{a} = 2$
 ou $\frac{2a_1}{a} = 4$



- Modo TM_{110}

- $p_{n,l} = p_{1,1} = 3,83$

$$(f_r)_{TM_{110}} = \frac{c}{2\pi a} \left[(3,83)^2 + \left(\frac{0,5}{a} \cdot a \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c}{2\pi a} \cdot 3,83$$

$$(f_r)_{TM_{110}} = 1,59 (f_r)_{TM_{010}}$$

Cavidades Cilíndricas - Modos $TE_{n,l,p}$

- Frequências de ressonância

Modos $TE_{n,l,p}$

$$f_n = \frac{c}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left[\left(\frac{p'_{n,l}}{\pi D} \right)^2 + \left(\frac{p}{2d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 1, 2, 3, \dots$$

$$p = 1, 2, 3, \dots$$

Modos $TM_{n,l,p}$

$$f_n = \frac{c}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left[\left(\frac{p_{n,l}}{\pi D} \right)^2 + \left(\frac{p}{2d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$l = 1, 2, 3, \dots$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

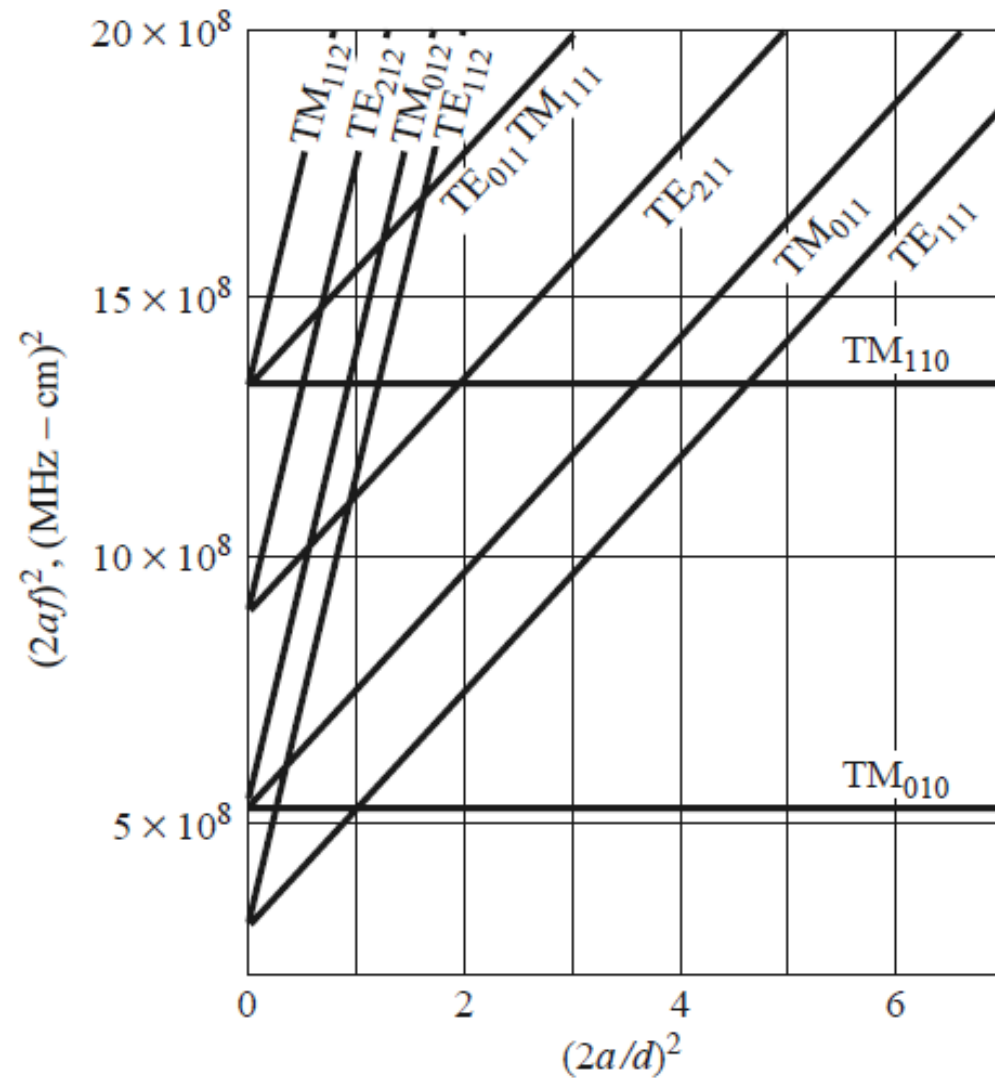
Cavidades Cilíndricas

- Comparação entre frequências de ressonância

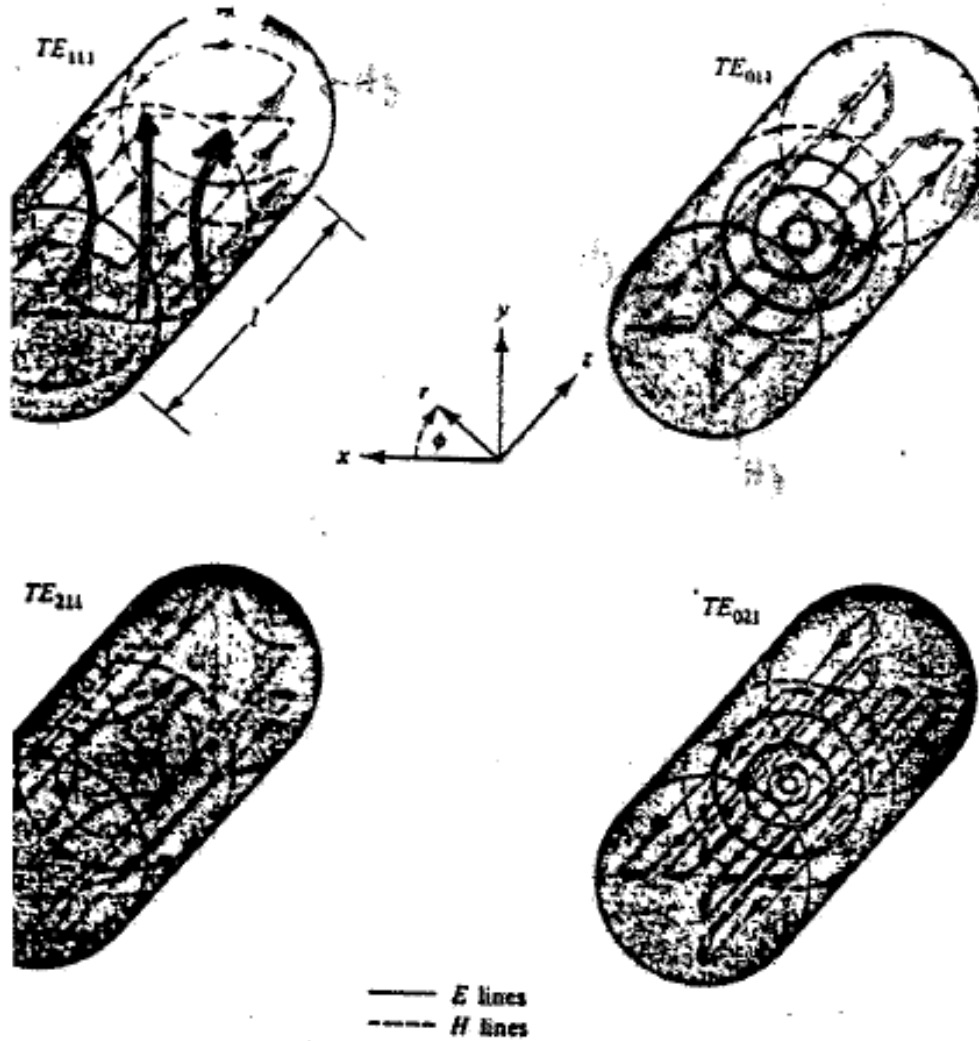
NO	1º MODO	2º MODO	3º MODO
$5 \therefore \frac{a}{d} = 2$ 	TM_{010} $p_{0,1} = 2,40$ $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$	TM_{110} $p_{11} = 3,83$ $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 3,83$	TE_{111} $p'_{11} = 1,84$ $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 6,55$
$\therefore \frac{a}{d} = 1$ 	TM_{010} $f_1 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$	TE_{111} $f_1 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 3,64$	TM_{110} $f_1 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 3,83$
$\therefore \frac{a}{d} = 0,5$ 	TM_{010} $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$	TE_{111} $f_1 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$	TM_{011} $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,82$
$\therefore \frac{a}{d} = 0,33$ 	TE_{111} $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,12$	TM_{010} $f_1 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,40$	TM_{011} $f_2 = \frac{c}{2\pi a} \cdot 2,82$

Cavidades Cilíndricas

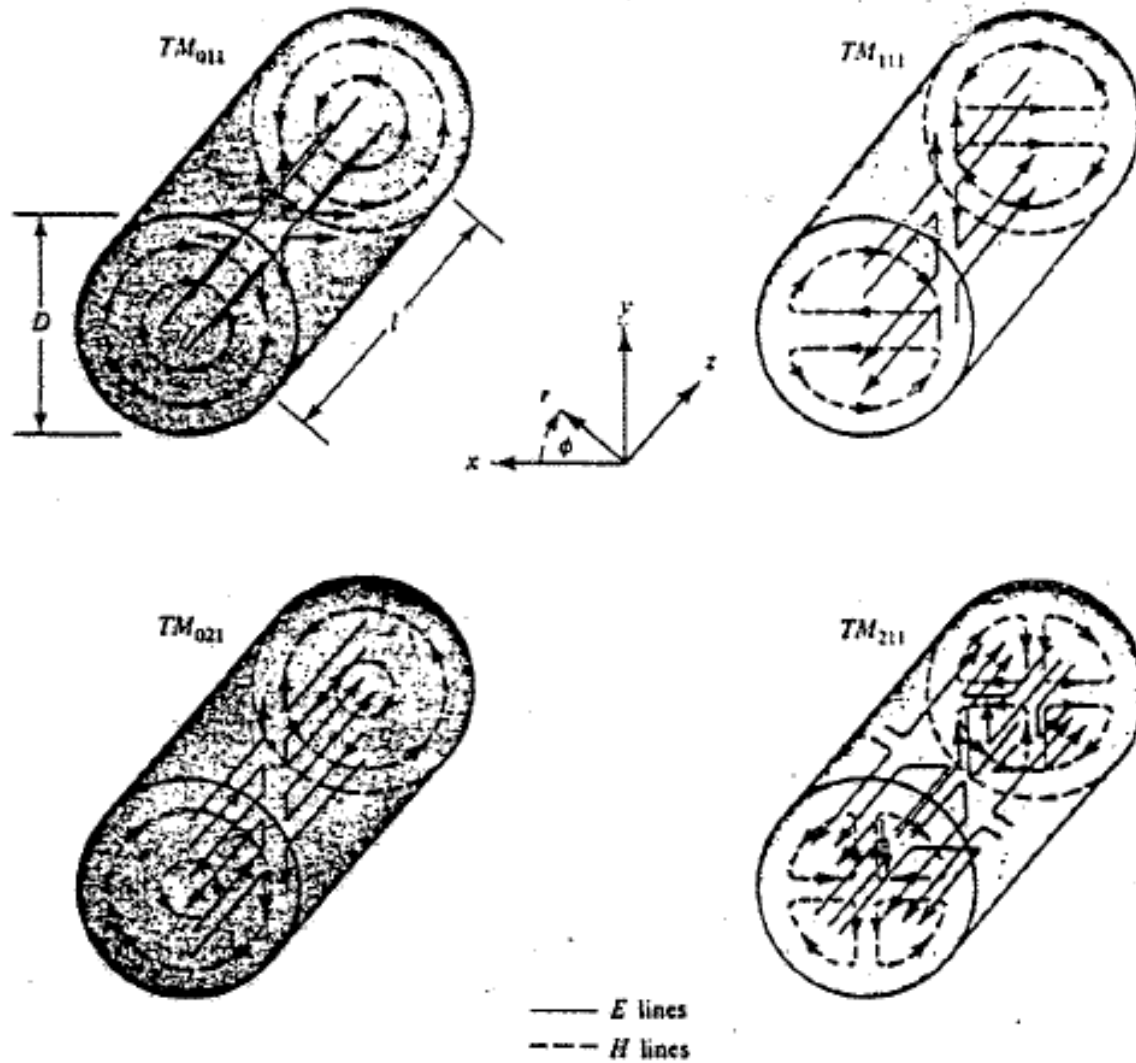
Carta de modos
ressonantes da
cavidade cilíndrica



Cavidades Cilíndricas

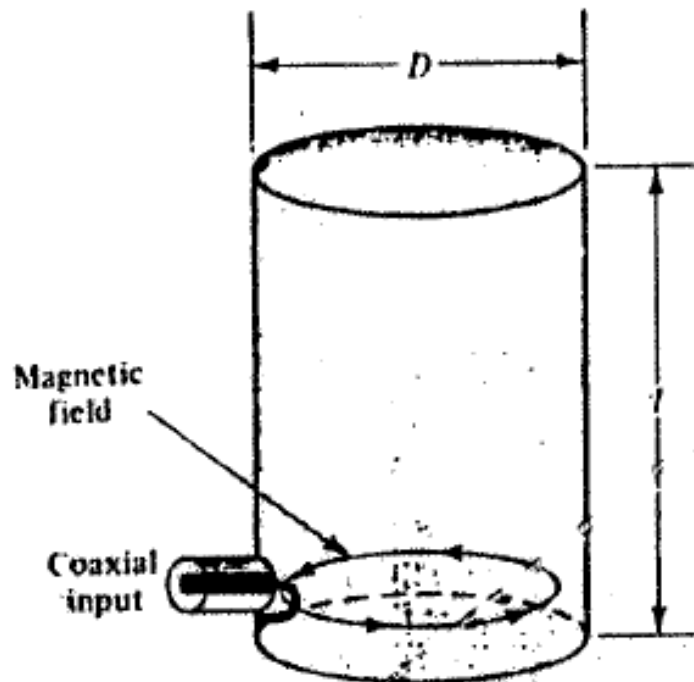


Cavidades Cilíndricas

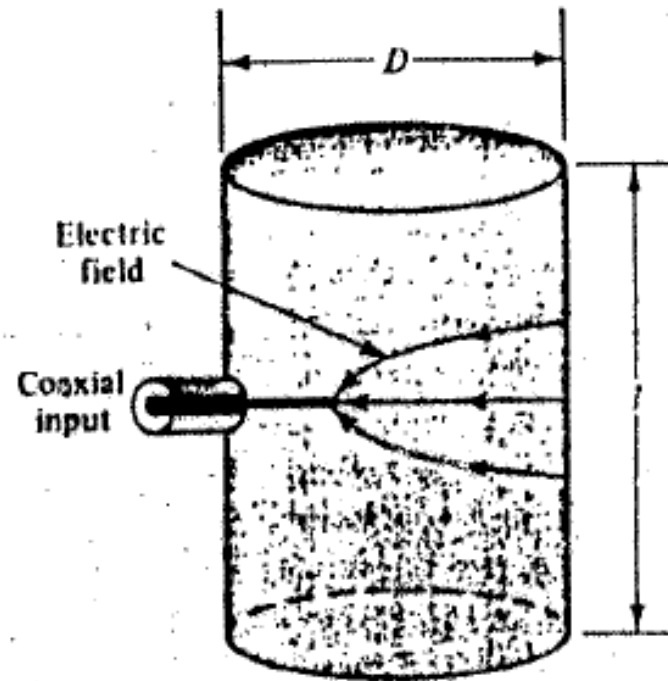


Cavidades Cilíndricas

Métodos de alimentação da cavidade cilíndrica



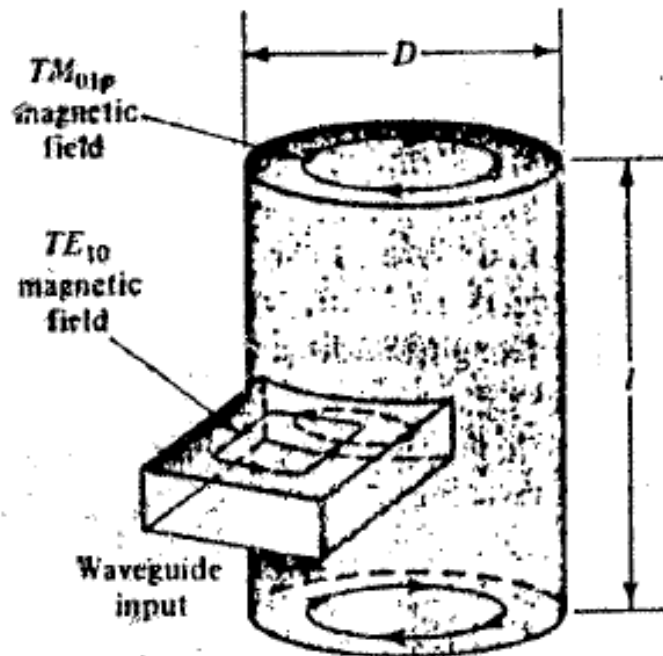
(a) Loop coupling



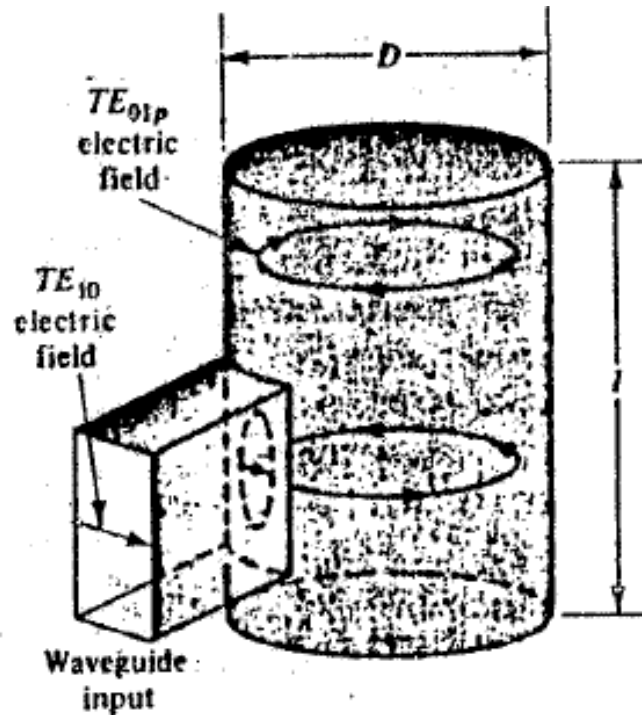
(b) Probe coupling

Cavidades Cilíndricas

Métodos de alimentação da cavidade cilíndrica



(c) Aperture coupling for TM_{nmp} cavity modes



(d) Aperture coupling for TE_{nmp} cavity modes

Cavidades Cilíndricas

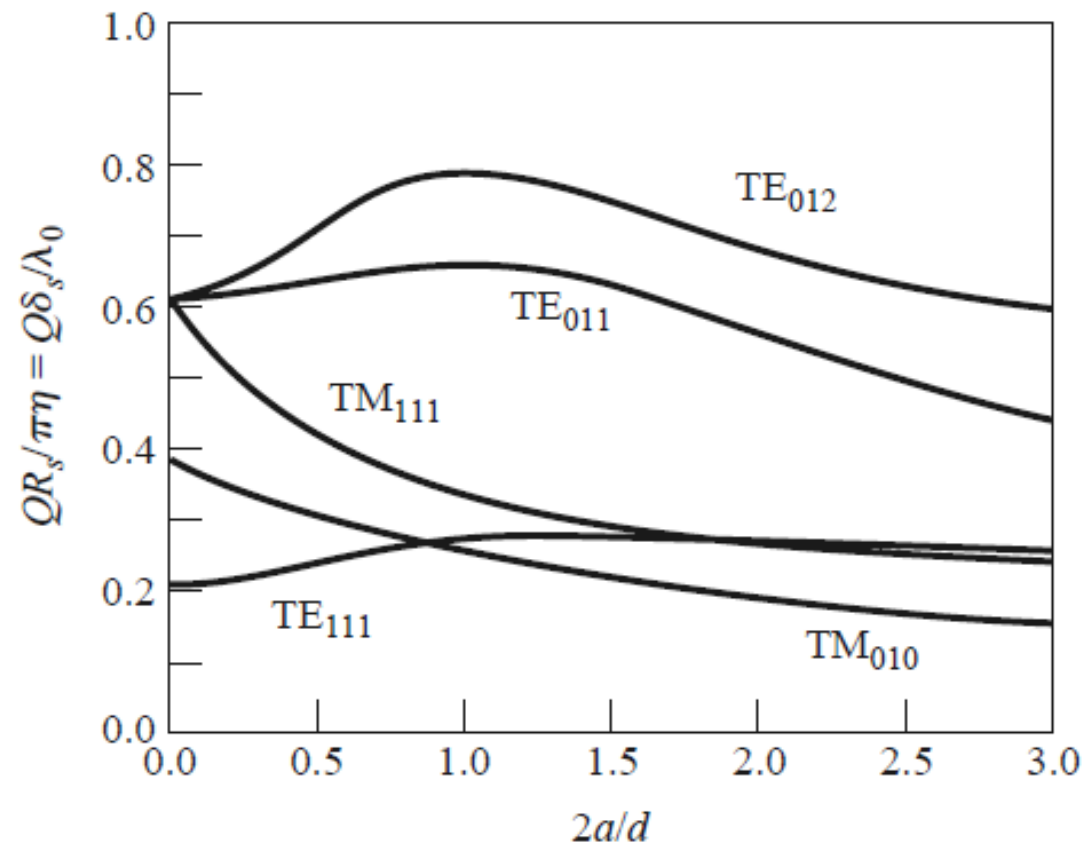
Índice de Mérito Não-Carregado – modos $TE_{m,l,p}$

- Dielétrico – ar, sem perdas
- Condutores reais – perdas condutivas

$$Q_c = \frac{\omega_0 W}{P_c} = \frac{(ka)^3 \eta a d}{4(p'_{nm})^2 R_s} \frac{1 - \left(\frac{n}{p'_{nm}}\right)^2}{\left\{ \frac{ad}{2} \left[1 + \left(\frac{\beta a n}{(p'_{nm})^2}\right)^2 \right] + \left(\frac{\beta a^2}{p'_{nm}}\right)^2 \left(1 - \frac{n^2}{(p'_{nm})^2}\right) \right\}}.$$

Cavidades Cilíndricas

- Índice de mérito normalizado para vários modos da cavidade cilíndrica



Cavidades Cilíndricas

- Tabela de índices de mérito normalizados para vários modos da cavidade cilíndrica

p	TE_{11p}	TE_{01p}
	$\frac{Q_{c.d}}{\lambda_0}$	$\frac{Q_{c.d}}{\lambda_0}$
1	0,275	0,657
2	0,416	0,735
3	0,581	0,902
4	0,753	1,09