Universidade de São Paulo
Brasil

Engenharia da Qualidade II

Prof. Fabrício Maciel Gomes
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

Referências Bibliográficas

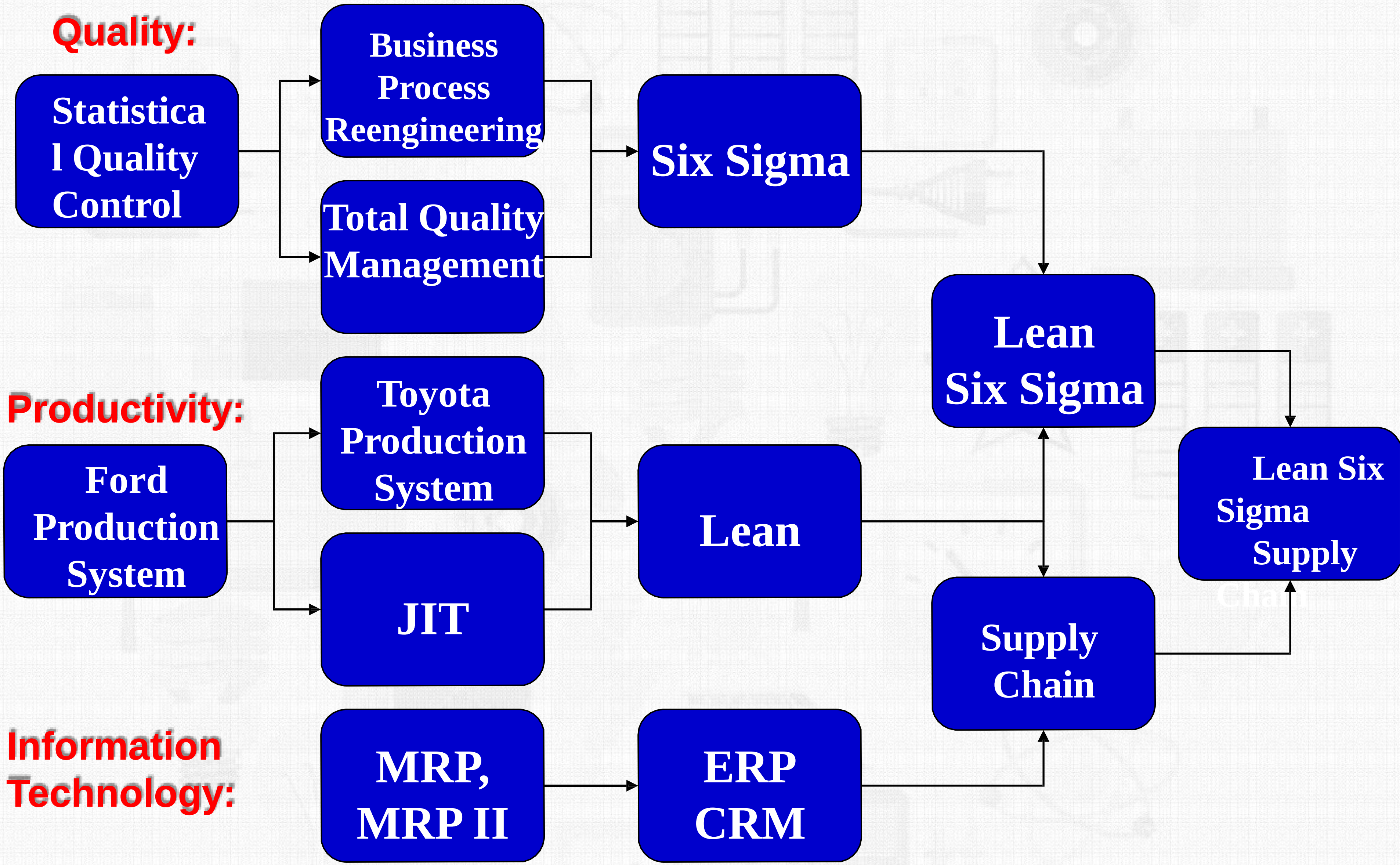
Sistema de Avaliação

Duas Provas teóricas
Um Trabalho em Grupo

$$\boxed{MédiaFinal = 0,4 \cdot P1 + 0,4 \cdot P2 + 0,2 \cdot Trabalho}$$

P1 – 22 de setembro de 2017
P2 – 01 de dezembro de 2017
Recuperação – 22 de dezembro de 2017

Evolution of Quality



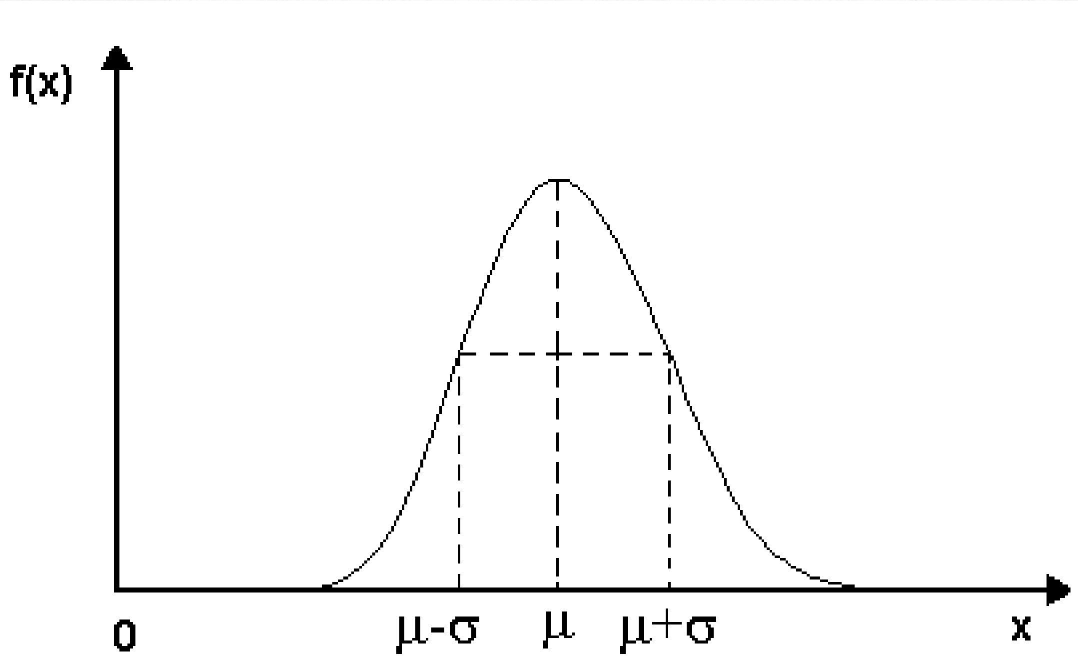
Source: Furterer 2004 (ASQ CQSDI)

Distribuição Normal

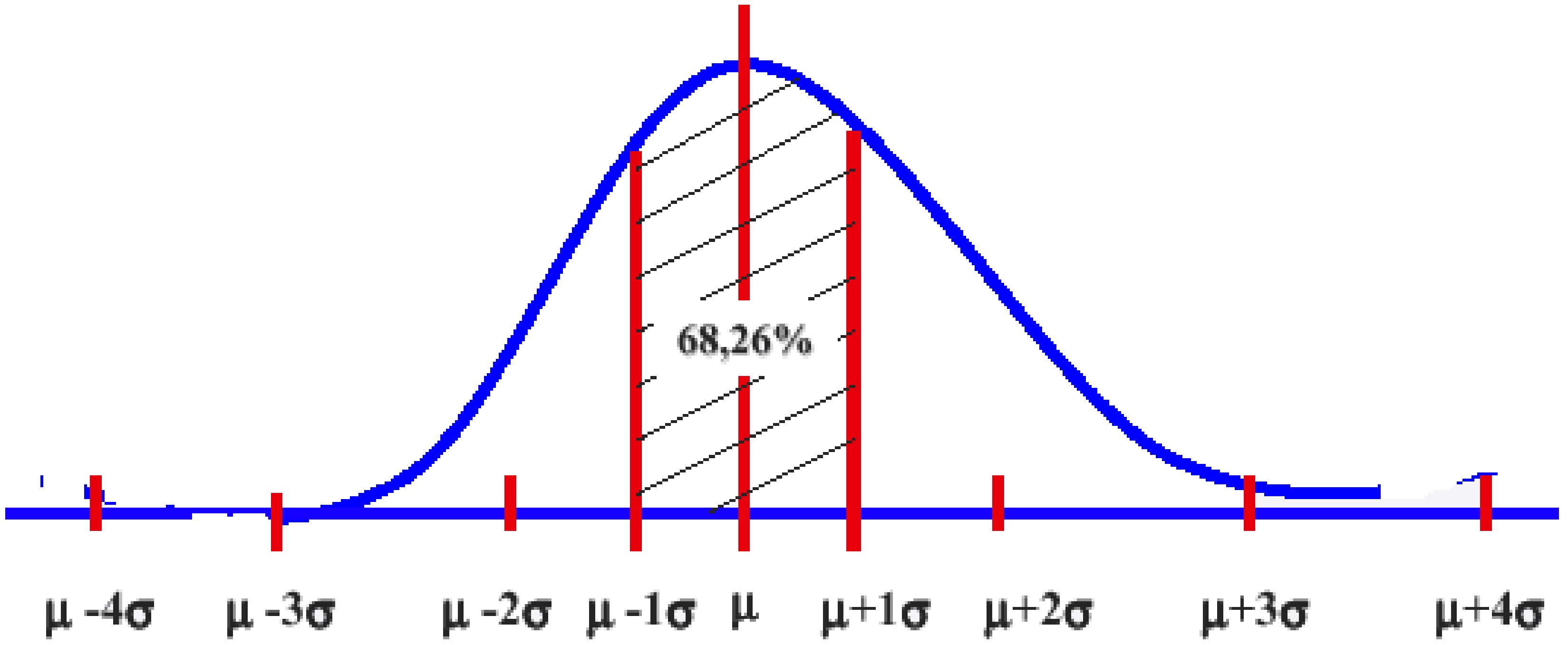
Definida pela seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$-\infty < x < +\infty$



Distribuição Normal



Intervalo	Probabilidade	
	Dentro	Fora
$\mu \pm 1\sigma$	68,26%	31,74%
$\mu \pm 2\sigma$	95,46%	4,54%
$\mu \pm 3\sigma$	99,73%	0,27%
$\mu \pm 4\sigma$	99,9936%	0,0064%

Distribuição Normal

Importância prática:

Normal é utilizada na modelagem de inúmeras variáveis encontradas na realidade

Importância teórica:

- **Teorema das Combinações Lineares**
- **Teorema do Limite Central**

Distribuição Normal

Teorema das Combinações Lineares:

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são V.A. com Distr. NORMAL

então

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i \quad \text{é V.A. NORMAL}}$$

onde: a_i são constantes

Distribuição Normal

Teorema do Limite Central:

Se X_1, X_2, ..., X_n são V.A. Independentes,

com Distribuição QUALQUER

então

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i \qquad \text{é V.A. NORMAL}}$$

para n suficientemente grande

Distribuição Normal

Como determinar a probabilidade da variável assumir um valor em dado intervalo [a, b]: P(a < X < b) = ?

- integrar f(x) nesse intervalo (difícil !)

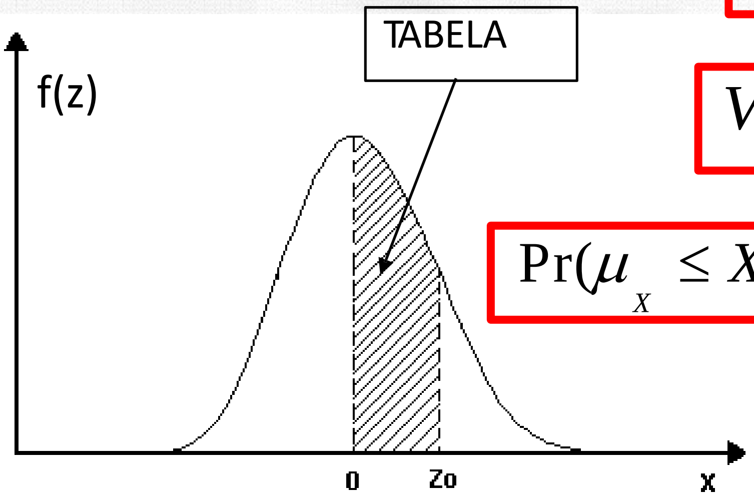
- utilizar tabelas fazendo a seguinte transformação linear:

$$Z = \frac{X - E(X)}{DP(X)} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Z: NORMAL REDUZIDA

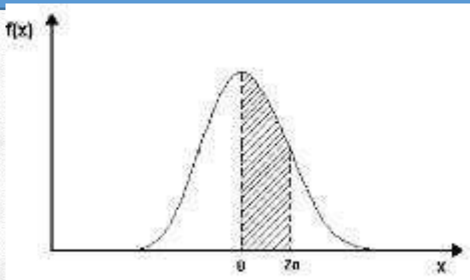
$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$



$$\Pr(\mu_X \leq X \leq x_0) = \Pr(0 \leq Z \leq z_0)$$

Distribuição Normal



$$\boxed{\mu_Z = 0}$$

$$\boxed{\sigma_Z^2 = 1}$$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$

Tabela A6.1 Distribuição normal — valores de $P(0 \le Z \le z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4778	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4833	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Distribuição Normal

Exemplo: Uma companhia embala em cada caixa 5 pires e 5 xícaras. Os pesos dos pires distribuem-se normalmente com média de 190 g e variância 100 g^2. Os pesos das xícaras também são normais com média 170 g e variância 150 g^2. O peso da embalagem é praticamente constante, igual a 100g.

Qual a probabilidade da caixa pesar menos de 2000 g?

Distribuição Normal

Exemplo: Uma fábrica de pneus fez um teste para medir o desgaste de pneus e verificou que ele seguia o comportamento de uma curva normal com média 48.000 km e desvio padrão de 2.000 km. Calcule a probabilidade de um pneu escolhido ao acaso:

a)Dure mais que 47.000 km.
b)Dure entre 45.000 e 51.000 km.
c)Até que quilometragem duram 90% dos pneus.

Distribuição Binomial

Condições do experimento:

(1) número fixo de repetições independentes : n

(2) cada repetição tem Distribuição Bernoulli:

“sucesso” ← ou → “fracasso”

(3) Probabilidade *p* de sucesso é constante

Distribuição Binomial

Pr(Y=k): Probabilidade de k “sucessos” nas primeiras k repetições de um total de n repetições

$$\underbrace{1, 1, 1, 1, 1, \ldots ,1}_{k} \qquad \underbrace{0, 0, 0, 0, \ldots ,0}_{n-k}$$

$$P(Y=k) = p^{k}.q^{\,n-k}$$

Considerando todas as combinações de n elementos k a k tem-se:

Distribuição Binomial

Seja:

X: variável aleatória Binomial

n: número de repetições k: número de sucessos

Pr(X=k): Probabilidade de k "sucessos" em

n repetições

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\boxed{E(x) = n.p}$$

$$\boxed{Var(x) = n.p.q}$$

Distribuição Binomial

Exemplo: Lançamento de 4 moedas viciadas. Probabilidade de sair cara (k) é 0,8 e coroa (c) é 0,2. Seja X: número de caras Logo: p=0,8 e q=0,2. Calcular a probabilidade de sair 2 caras: Pr(X=2)=?

Distribuição de Poisson

X: Número de sucessos em um determinado intervalo contínuo (tempo, comprimento, superfície, volume, etc).

Exemplos:

- ✓ Número de pessoas que chegam na rodoviária no período de 1 h.
- ✓ Número de defeitos em barras de aço 5 m.
- ✓ Número de focos de incêndio por hectare.

Distribuição de Poisson

Hipóteses:

1.O número de sucessos em intervalos não sobrepostos constituem variáveis aleatórias independentes.

2.A probabilidade do número de sucessos em qualquer intervalo depende apenas da sua dimensão. Por outras palavras, em intervalos de mesma dimensão são iguais as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos.

3.A probabilidade de obter dois ou mais sucessos em um intervalo suficientemente pequeno é desprezível.

Distribuição de Poisson

Seja t: comprimento total do intervalo
n: número de partes da divisão do intervalo, tal que no máximo um sucesso em cada parte
t/n: comprimento de cada parte do intervalo

Portanto:

$$\boxed{\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Onde k: número de sucessos em n repartições

p: probabilidade de sucesso em cada parte

Distribuição de Poisson

Seja λ: taxa de ocorrência de sucessos

(Ex.: chegadas/ hora; defeitos /metro)

Então:

$$\boxed{p = \frac{\lambda t}{n}} \Rightarrow \boxed{\Pr(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}}$$

Considerando n → infinito : **(POISSON)**

$$\Pr(X = k) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$\boxed{\Pr(X = k) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^{k}}{k!}}$$

Distribuição de Poisson

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda t)^2 \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

Exemplo: Num processo de fabricação de alumínio aparecem em média uma falha a cada 400 m (taxa de falha: λ= 0,0025 falhas/m). Qual a probabilidade de ocorrer 3 falhas em 1000m?

Distribuição Hipergeométrica

Difere da Distribuição Binomial somente porque as repetições do experimento são feitas sem reposição.

Seja:

N: conjunto de elementos

r : subconjunto com determinada característica n: elementos são extraídos sem reposição

X: número de elementos com tal característica

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Distribuição Hipergeométrica

$$E(X) = \sum_k k \cdot \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \ldots = \frac{r \cdot n}{N} = n \cdot p$$

$$Var(X) = \sum_k (k - np)^2 \cdot \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \ldots = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que existam, de fato, três motores defeituosos no lote. Qual a probabilidade de que a inspeção 100% seja necessária?

Distribuição da Média Amostral

- Distribuição constituída de todos os valores de   , considerando todas as possíveis amostras de tamanho "n"

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Onde X_1, X_2, ..., X_n são V.A. com mesma Distr. da V.A. X

Distribuição da Média Amostral

Parâmetros da Distribuição da Média Amostral

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot [E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)]$$

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot [E(X) + E(X) + \cdots + E(X)] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X)$$

$$\boxed{E(\bar{x}) = E(X) = \mu}$$

Sendo: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Variáveis Aleatórias Independentes:

$$Var(\bar{X}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot [Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)]$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot [Var(X) + Var(X) + \cdots + Var(X)] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X)$$

$$\boxed{Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

Distribuição da Média Amostral

Exemplo: População = {2,3,6,8,11}

Amostra de 2 (dois) elementos com reposição.

N = 5   n = 2

Amostras possíveis: 5^2 = 25 amostras

(2,2)	2,0	(2,3)	2,5	(2,6)	4,0	(2,8)	5,0	(2,11)	6,5
(3,2)	2,5	(3,3)	3,0	(3,6)	4,5	(3,8)	5,5	(3,11)	7,0
(6,2)	4,0	(6,3)	4,5	(6,6)	6,0	(6,8)	7,0	(6,11)	8,5
(8,2)	5,0	(8,3)	5,5	(8,6)	7,0	(8,8)	8,0	(8,11)	9,5
(11,2)	6,5	(11,3)	7,0	(11,6)	8,5	(11,8)	9,5	(11,11)	11,0

Distribuição da Média Amostral

População:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6{,}0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2\right]$$

$$\sigma^2 = 10{,}8$$

Amostra:

$$E(\overline{X}) = \frac{\sum \overline{x}_i}{N^n} = \frac{2{,}0+2{,}5+\ldots+11{,}0}{5^2} = \frac{150}{25} = 6{,}0 = \mu_X$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sum (\overline{x}_i - E(\overline{X}))^2}{N^n} = \frac{\sum (\overline{x}_i - 6{,}0)^2}{25}$$

$$Var(\overline{X}) = 5{,}40 = \frac{10{,}8}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Distribuição da Média Amostral

- **Amostragem com reposição**
- **População infinita: N > 20.n**
- **X_i: V.A. Independentes**

Então:

$$E(\bar{x}) = E(X) = \mu_X$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

Aproximações com a Normal

Exemplo: Uma urna contém <u>muitas</u> fichas numeradas: um terço com o número 2, um terço com 4 e um terço com 6.

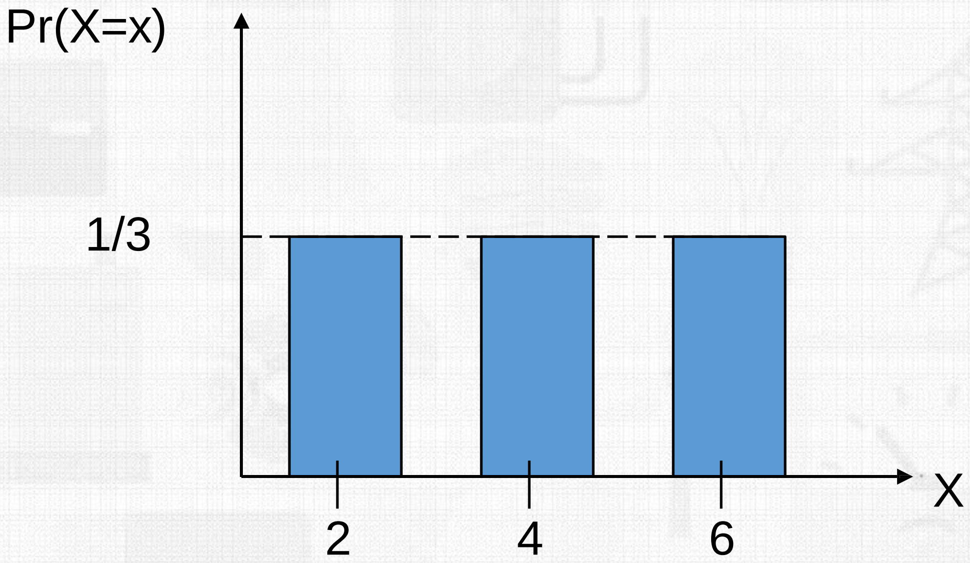
X: número de uma ficha retirada ao acaso

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (2 + 4 + 6) = 4$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 =$$

$$Var(X) = (2^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{3} + 6^2 \cdot \frac{1}{3}) - \left(4\right)^2 = \frac{8}{3} = 2{,}66$$

Aproximações com a Normal



Aproximações com a Normal

Continuação do exemplo da urna com fichas: 2, 4, 6

<u>Extrair amostra de tamanho 2:</u>

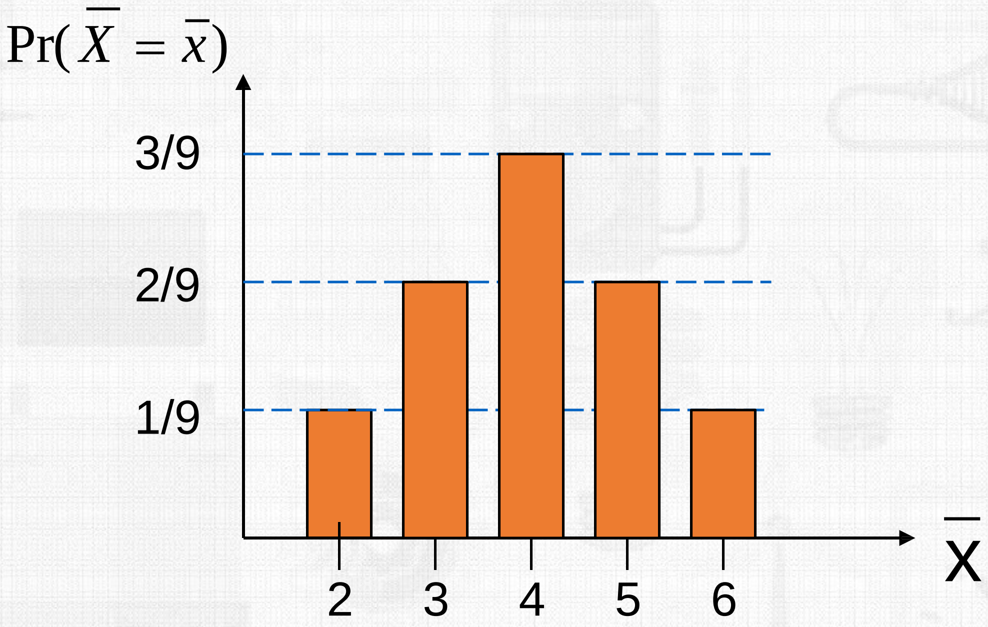
Número de diferentes amostras = $3^2 = 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2,2)	(2,4)	(2,6)	(4,2)	(4,4)	(4,6)	(6,2)	(6,4)	(6,6)
$\bar{X}$	2	3	4	3	4	5	4	5	6

$$E(\bar{X}) = 2\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot\frac{2}{9} + 4\cdot\frac{3}{9} + 5\cdot\frac{2}{9} + 6\cdot\frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4 = \mu_X$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{2,66}{2} = 1,33$$

Aproximações com a Normal



Aproximações com a Normal

Extrair amostra de tamanho 5:

Número de diferentes amostras = 3^5 = 243

X_i: número de vezes que a ficha "i" saiu na amostra de tamanho 5

$$\boxed{\overline{X} = \frac{2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_4 + 6 \cdot X_6}{5}}$$

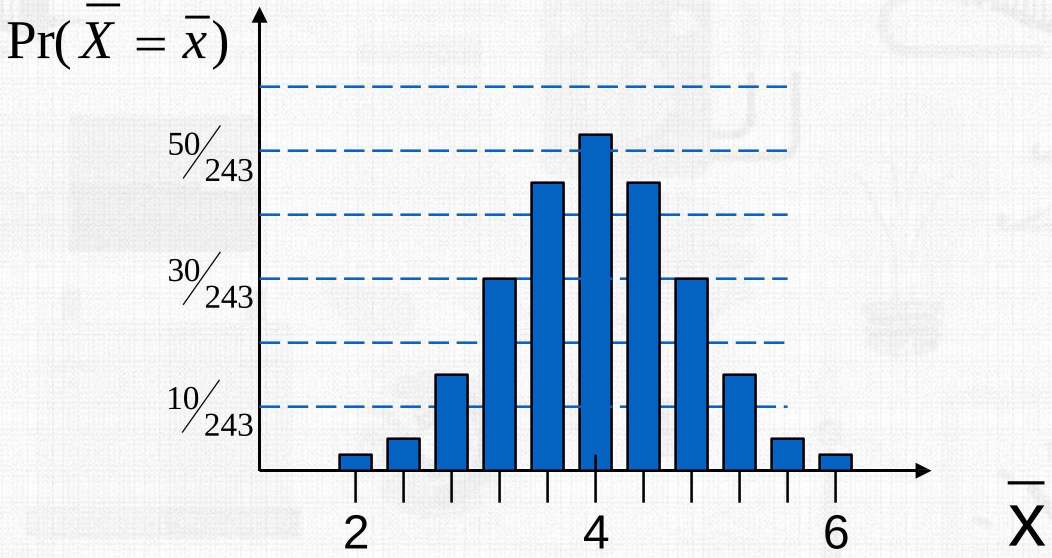
$$E(\overline{X}) = \mu_X = 4$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{5} = \frac{2,66}{5} = 0,53$$

X_i: Multinomial (Polinomial)

$$\boxed{\Pr(X_2 = x_2;\quad X_4 = x_4;\quad X_6 = x_6) = \frac{5!}{x_2! \cdot x_4! \cdot x_6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x6}}$$

Aproximações com a Normal



Aproximações com a Normal

Extrair amostra de tamanho 10: Nº. de amostras = 3^{10} = 59.049

X_i: número de vezes que a ficha "i" saiu na amostra de tamanho 10

$$\boxed{\overline{X} = \frac{2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_4 + 6 \cdot X_6}{10}}$$

$$E(\overline{X}) = \mu_X = 4$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{10} = \frac{2{,}66}{10} = 0{,}266$$

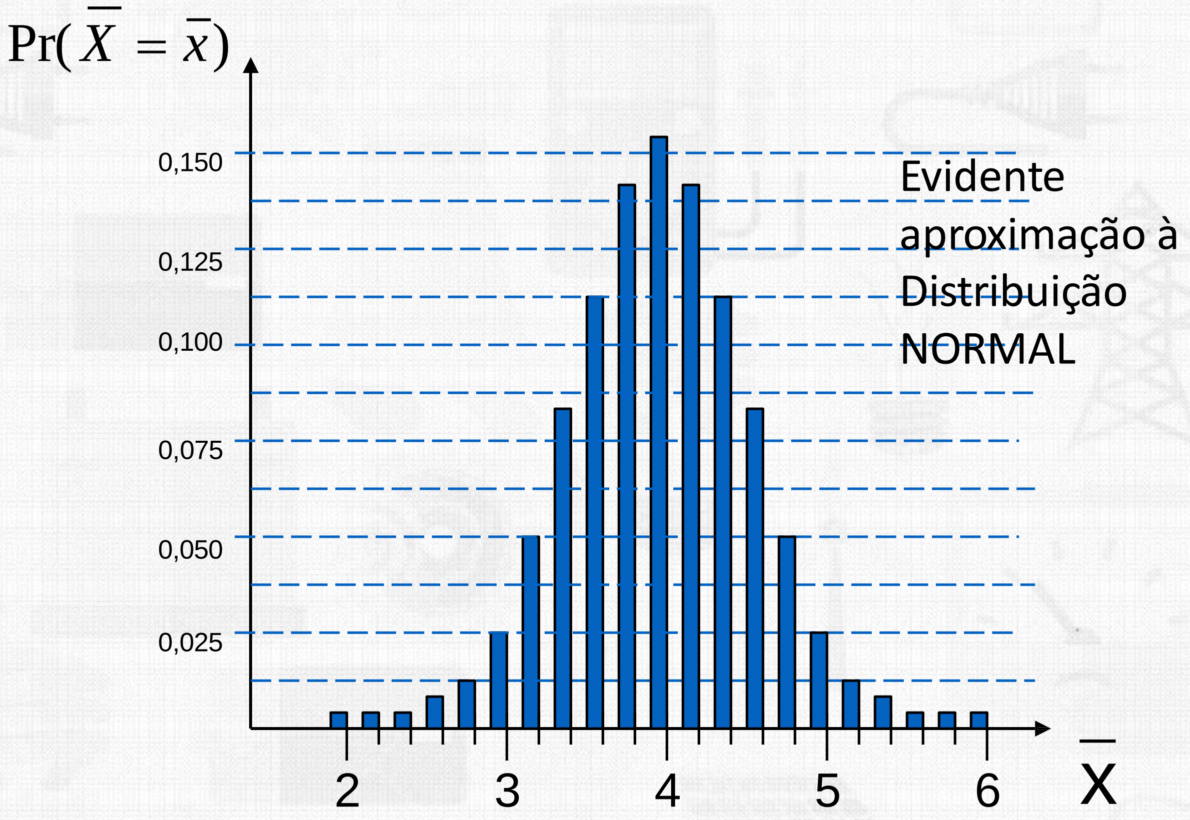
X_i: Multinomial (Polinomial)

$$\boxed{\Pr(X_2 = x_2;\quad X_4 = x_4;\quad X_6 = x_6) = \frac{10!}{x_2! \cdot x_4! \cdot x_6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x6}}$$

Distribuição de Probabilidade de $\overline{X}$

2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	
0,00002	0,00017	0,00093	0,00356	0,01042	0,02459	0,04827	0,08027	0,11457	0,14141	
4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
0,15162	0,14141	0,11457	0,08027	0,04827	0,02459	0,01042	0,00356	0,00093	0,00017	0,00002

Aproximações com a Normal



Aproximações com a Normal

f : freqüência absoluta com que foi observada alguma característica em cada elemento de uma amostra de tamanho “n”

SUCESSO: quando a característica foi observada

FRACASSO: caso contrário

Seja: p = Prob. de Sucesso em cada elemento da amostra

q = Prob. de Fracasso

Aproximações com a Normal

Amostragem <u>com</u> reposição:

f tem Distribuição Binomial

$$E(f) = np$$

$$Var(f) = npq$$

Amostragem <u>sem</u> reposição:

f tem Distribuição Hipergeométrica

$$E(f) = np$$

$$Var(f) = npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Aproximações com a Normal

- $n.p \geq 5$ $n.q \geq 5$ N > 20 x n

garantem uma boa aproximação pela

$$Normal(E(f_{Normal}) = np;\quad Var(f_{Normal}) = npq)$$

- $n.p \geq 5$ $n.q \geq 5$ N < 20 x n

garantem uma boa aproximação pela

$$Normal(E(f_{Normal}) = np;\quad Var(f_{Normal}) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1})$$

Aproximações com a Normal

Exemplo: Verificou-se que 2% das peças produzidas por certa máquina são defeituosas. Qual a Prob. de existirem no máximo 3% de peças defeituosas num lote com 400 peças?