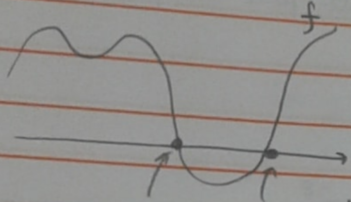
Cálculo Numérico

Quinta-feira 04/05/17

* 2 assuntos para o 2º bimestre:
1) Zero de funções
2) mínimos quadrados

1



pontos onde $f(x) = 0$, dá-se o nome de zeros de f ou raízes de f.

* Procurar zeros de f é o mesmo que resolver equação $f(x) = 0$

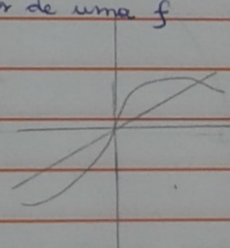
Exemplo: $f(x) = x^2 - 3x + 2$ x é raiz de f $\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $x = 2$ ou $x = 1$

Por outro lado, sempre que temos uma equação em x podemos reescrevê-la como um problema de achar os zeros de uma f

Ex $\operatorname{sen}(x) = x/2$

$\operatorname{sen}(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x - \frac{x}{2}}_{f(x)} = 0$



Ex: $x^2 = 11$

x é solução se e somente se é zero de $f(x) = x^2 - 11$

$x = \pm\sqrt{11}$

PROBLEMA: Como obter o número $\sqrt{11}$ (com a precisão desejada) usando apenas operações elementares?

$3^2 < 11 < 4^2$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$\sqrt{11} = 3,???$

etapa 1 $3 \vdash\!\dashv 4$ Precisão $1 = 1/2^0$ etapa 4 $3{,}25 \vdash\!\dashv 3{,}375$ $1/8 = 1/2^3$

04/05/17   2 $3 \vdash\!\dashv 3{,}5$ $1/2 = 1/2^1$

3   $3{,}25 \vdash\!\dashv 3{,}5$ $1/4 = 1/2^2$

$3{,}5^2 = 12{,}25 \Rightarrow \sqrt{11}$ está entre 3 e $3{,}5$ Precisão $1/2$

$3{,}25^2 = 10{,}5625 \Rightarrow \sqrt{11}$ está entre $3{,}25$ e $3{,}5$ Precisão $1/4$

$3{,}375^2 = 11{,}39\ldots \Rightarrow \sqrt{11}$ está entre $3{,}25$ e $3{,}375$ e assim por diante   Precisão $1/8$

✳ Quantas vezes precisaremos fazer esse procedimento para ter precisão de 10^{-8}?

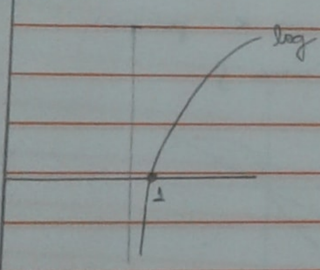
- Na etapa n: precisão $\frac{1}{2^n}$

Então basta achar n tal que $\frac{1}{2^n} < 10^{-8}$

↳ "Isolamos" n

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) < \log(10^{-8})$$

Parênteses:



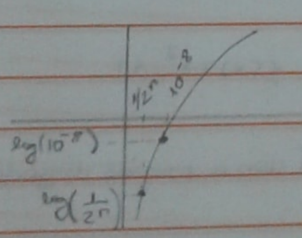
$x < 1$: $\log x < 0$

$x = 1$ $\log x = 0$

$x > 1$: $\log x > 0$

Importante: log é crescente

$[x < y \Rightarrow \log x < \log y]$



Continuando: $\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log(2^{-n}) = -n \log 2$

e $\log(10^{-8}) = -8 \log 10$

$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{1}{2^n}$ e 10^{-8} corresponde a função $\frac{1}{x}$, que é decrescente

$\Downarrow$

$\frac{1}{10^8}$

04 / 05 / 1?

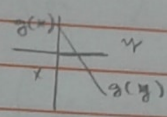
$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) < \log(10^{-8})$$

$$-n\log 2 < -8\log 10$$

g decrescente:

$$x < y \Leftrightarrow g(x) > g(y)$$

$$g(x) = -x$$



$$g(-n\log 2) > g(-8\log 10)$$

$$n\log 2 > 8\log 10$$

$$n > \frac{8\log 10}{\log 2}$$

Outro caminho: $n\log\left(\frac{1}{2}\right) < -8\log 10$ $\qquad g(x) = \frac{x}{\log(1/2)}$

$$n > \frac{-8\log 10}{\log(1/2)}$$

Calculando: $\frac{-8\log 10}{\log 2} = 26{,}57542 48$

Conclusão: quando tenho certeza que o intervalo onde está o resultado da raiz é menor que 10^{-8}? Resposta: quando $n \geq 27$.

Propriedade dos logaritmos:

$$\frac{\log_b r}{\log_b s} = \log_s r$$

$$\frac{\log 10}{\log 2} = \log_2 10$$

04/05/17

"Truque de mágica"

palpite p/ $\sqrt{11}$: $x_0 = 6$

Melhorando a aproximação:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{11}{x_0}\right) = 3,91666667$$

na calculadora: $6 = \text{Ans}$

$0.5 \cdot \left(\text{Ans} + \frac{11}{\text{Ans}}\right)$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{11}{x_1}\right) = 3,362588652$$

$x_3 = 3,316938935$

$x_4 = 3,316624805$

$\boxed{x_5 = 3,316624790}$

$x_6 = 3,316624790$

— // —

Outro exemplo: $\sqrt[3]{37}$

$x_0 = 34$

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{37}{x_k^2}\right)$$

média aritmética ponderada com pesos 2 e 1.

$$\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{37}{x^2}} = \sqrt[3]{37}$$

1º: 22,6773356

2: 15,1422064

3: 10,1485943

4: 6,88547766

5: 4,85046155

6: 3,75786194

7: 3,37861242

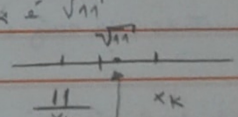
8: 3,33285591

9: 3,33222197

10: 3,33222185

$$\sqrt{\frac{11}{x_k} \cdot x_k} = \sqrt{11}$$

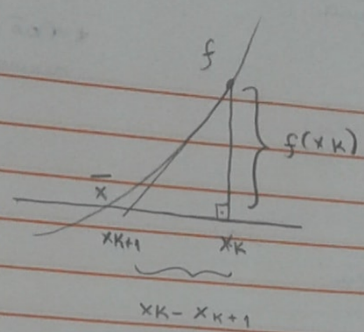
$\frac{11}{x_k}$ é o número cuja média geométrica com x_k é $\sqrt{11}$



$\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{11}{x_k}\right)$ média geométrica

01/05/17

Newton



Inclinação da reta $f'(x_k) = \dfrac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$

isolando $x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

08/05/17

Relembrando: Método de Newton

Atividade:

1. Analise graficamente a equação $\operatorname{sen} x = \dfrac{x}{2}$

a) Quantas soluções tem?

b) Encontre-as pelo método de Newton

equações Transcendentes

2. Mesma coisa para $e^x = 5x$