Prova 2 Mecânica 1^o semestre 2014

Entrega dia 3 de Novembro 2014.

Leia com cuidado cada questão. A prova é individual

1. Considere dadas as formulações da Mecânica Clássicas através das leis de Newton ou das equações de Lagrange. Deduza as equações de Hamilton para a dinâmica. $H(q,p) = p\dot{q} - L$ é a transformada de Legendre do Lagrangeano $L(q,\dot{q})$. Faça isso

(i) comparando os diferenciais dL e dH,

(ii) Olhando para o problema variacional $\delta \int f(q,\dot{q},p,\dot{p})dt = 0$, onde $f(q,\dot{q},p,\dot{p}) = p\dot{q} - H(q,p)$ e fazendo variações δq, $\delta\dot{q}$, δp e $\delta\dot{p}$

2. Um pêndulo de massa M_2 e comprimento l está suspenso de uma massa M_1, que por sua vez só se pode mover, sem atrito ao longo de um eixo vertical e sujeita à força de uma mola de constante k e comprimento natural A. A aceleração da gravidade em queda livre é g. (i) Escreva o vetor posição da massa em função das coordenadas cartesianas do ponto de suspensão e das coordenadas da massa relativas ao ponto de suspensão. (ii) Descreva os vínculos e elimine-os escolhendo coordenadas generalizadas adequadas. (iii) Obtenha o Lagrangeano e os momentos generalizados. (iv) Obtenha o Hamiltoniano e as equaçoes de movimento.

3. Uma partícula de massa m se move em duas dimensões. As coordenadas parabólicas são definidas através de $x = \sigma\tau$ e $y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$. (i) Escreva o Hamiltoniano em coordenadas parabólicas para a partícula num potencial $V(\sigma,\tau)$

(ii) Encontre as equações de movimento no caso em que V é função somente do módulo $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

(iii) Obtenha o Hamiltoniano para as coordenadas generalizadas parabólicas no caso em que além do potencial, a partícula se move em um trilho sem atrito dado pela relação $y = Ax^2 - \frac{1}{4A}$. (Quais são os graus de liberdade?)

(iv) Encontre as equações de movimento de Hamilton

4. O potencial gravitacional em $\boldsymbol{r}$ devido a uma massa m pontual em $\boldsymbol{r}'$ é $\mathcal{G} = Gm/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$. Para uma casca esférica de raio a, centrada na origem, com densidade superficial de massa σ

$$\mathcal{G} = \int \frac{G\sigma}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dA \qquad (1)$$

onde dA é a medida de integração na superficie da esfera. Se a densidade σ for uniforme e a massa total $m = 4\pi a^2 \sigma$,

(i) mostre que a uma distância $r_o > a$ da origem, o potencial é dado por mG/r_o como se toda a massa estivesse na origem. Encontre o valor para valores de $r_o < a$.

(ii) Encontre o potencial para uma esfera sólida de raio R, massa m a uma distância r_o do centro da esfera.

A terra pode ser considerada um elipsoide de revolução com raio equatorial r_E. A distância do centro a um dos polos é chamado de raio polar e é menor que o raio equatorial: $r_P = r_E(1 - \epsilon)$. A distribuição de massa é uniforme. Em todos os cálculos a seguir mantenha termos até primeira ordem em ϵ, pois $\epsilon \sim O(10^{-3})$.

(iii) Calcule o volume V do elipsoide e defina o raio médio R atráves de $V = \frac{4\pi}{3} R^3$. Isto é, escreva R na forma

$$R = r_E(1 + a\epsilon)$$

e determine a

(iv)Um modelo para a terra é uma esfera uniforme de raio R mais uma densidade superficial $\sigma(\theta)$, calculada de forma que a massa contida no ângulo sólido $d\Omega$ seja igual à contida no mesmo $d\Omega$ no elipsoide. O θ usual de coordenadas polares é a co-latitude , 0 no polo norte, $\pi/2$ no equador e π no polo sul.

A condição para determinar $\sigma(\theta)$ é

$$\rho d\Omega \int_0^{r(\theta)} r^2 dr = \rho d\Omega \int_0^R r^2 dr + \sigma R^2 d\Omega$$

Mostre que

$$\sigma(\theta) = A\epsilon(1 - B\cos^2\theta)$$

e determine A e B. (não use o ângulo errado, cuidado: $x = r\sin\theta$ ....)

O potencial gravitacional devido à terra a uma distância $r >> r_E$, novamente até primeira ordem em ϵ tem duas partes $\mathcal{G} = GM/r + \delta\mathcal{G}$. A primeira devido à uma esfera uniforme foi dada no problema anterior.A segunda parte pode ser calculada usando a equação 1. O resultado é dado por

$$\delta\mathcal{G} = \frac{\epsilon}{5} \frac{MGr_E^2}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta) = \gamma \frac{1}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

até ordem $1/r^3$. (Não precisa fazer este cálculo, mas se tiver interesse procure no livro do Jackson expansão em multipolos usando polinômios de Legendre.)

A força gravitacional sobre um satélite de massa m_s será dada por $\boldsymbol{F} = m_s \nabla \mathcal{G}$. A energia potencial $V = -m_s \mathcal{G}$.

(v) Escreva o Lagrangeano do satélite nesse campo de força. Despreze o movimento da terra, ou seja não precisa introduzir a massa reduzida.

(vi) Encontre as equações de movimento. Identifique as variáveis cíclicas.

(vii) Para movimento no plano equatorial da terra ($\theta = \pi/2$) as órbitas são quase elípticas. Relacione o período de oscilações radiais com o da órbita elíptica. A órbita é fechada?

Gradiente em coordenadas esféricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$(1 + a\epsilon)^b \approx 1 + ba\epsilon$$

Valores (1.) 3 pontos (1.5 pontos cada) (2.) 4 pontos (1 ponto cada item) (3.) 3 pontos (1.0, 0.5,1.0 e 0.5)