Lista 4 Mecânica (2do semestre 2014) Data entrega 29/10/14

1. Uma função é convexa se $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

1.(i) Mostre que para funções diferenciáveis ao menos duas vezes uma função é convexa num intervalo, se $d^2f/dx^2 \geq 0$ em todo o intervalo. A transformada de Legendre (TL) $g(p)$ é definida da seguinte forma. Primeiro defina a função $F(x,p) = px - f(x)$. Para x fixo ache o valor de p que torna $F(x,p)$ máximo. Isso determina a função $p(x)$. A inversa desta função é $x(p)$.

1.(ii) O que aconteceria neste passo se $f(x)$ não fosse convexa?

A TL é definida como

$$g(p) = F(x(p), p).$$

1.(iii) Mostre que a função $g(p)$ é convexa e portanto podemos definir a TL de $g(p)$;

1.(iv) mostre que a TL de $g(p)$ é $f(x)$. Este passo é fundamental para mostrar que não há perda de informação ao substituir f por g.

1.(v) Esboce (à mão livre) a função $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e escolha um ponto qualquer x. Mostre no desenho o significado de p é $g(p)$.

1.(vi) Mostre que a Tl de $f(x) = x^a/a$ é $g(p) = p^b/b$. Qual é a relação entre entre a e b?.

1.(vii) Dado que para qualquer x e p (não necessariamente ligados pela função $p(x)$) temos

$$xp \leq f(x) + g(p).$$

Use o resultado de (vi) e mostre o resultado: $px \leq \frac{x^a}{a} + \frac{p^b}{b}$ que para $a = 1/2$ diz o óbvio $(p-x)^2 \geq 0$.

2. Considere uma função $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ de n variáveis reais. Suponha que todas as derivadas $f_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ existam. A função f é estritamente convexa em uma região se para todo $\boldsymbol{x}$ nela a matriz de componentes f_{ij} é positiva definida (i.e. para qualquer vetor $\boldsymbol{y}$, com $||\boldsymbol{y}|| > 0$, a forma quadrática $\sum_{i,j=1,n} y_i f_{ij} y_j > 0$.)

2.(i) Seja $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1,n} f_{ij} x_i x_j$ uma função estritamente convexa.

A matriz de componentes f_{ij} é inversível (não tem nenhum autovalor nulo, se tivesse chame $\boldsymbol{u}_o$ o autovetor associado, a desiguladde $\sum_{i,j=1,n} y_i f_{ij} y_j > 0$ seria violada para $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}_o$)

Defina a TL

$$g(\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}) = \max_x F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$$

com $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{p} - f(\boldsymbol{x})$.

Encontre a $g(\boldsymbol{p})$, a TL de $f(\boldsymbol{x})$.

2. O Hamiltoniano é definido como a TL do Lagrangiano onde as as variáveis velocidades generalizadas $\{\dot{q}_i\}$ são substituidas pelos momentos $\{p_i\}$.

Obtenha o Hamiltoniano nos seguintes casos:

2.(i) Partícula livre em coordenadas esféricas.

2.(ii) Pêndulo esférico (Haste rígida comprimento R).

2.(iii) O Lagrangiano é dado pela forma quadrática $L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + a\dot{q}_1\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q_1^2$

2.(iv) O problema de duas partículas em três dimensões que interagem com uma energia potencial $V(r)$, onde $r = |\boldsymbol{r}|$ e $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Note que devido a que o potencial é esfericamente simétrico, e o momento angular total é conservado, temos que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, e $\boldsymbol{r}$ é perpendicular a $\boldsymbol{L}$. Portanto o problema é efetivamente bidimensional. Basta escolher o sistema de coordenadas esféricas com o eixo $\boldsymbol{z}$ paralelo a $\boldsymbol{L}$.

3.(i) Obtenha as equações de Hamilton a partir da definição de $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$ e das equações de Euler Lagrange

3.(ii) Mostre que as equações de Hamilton são as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional $\delta S = 0$, onde a ação é

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p,q) \right) dt$$

e as variações δq e δp se anulam nos extremos.

3.(iii) Mostre que se uma coordenada q_i for cíclica, isto é o Lagrangiano não depende dela, o momento generalizado $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ é constante e que $-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$.