Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

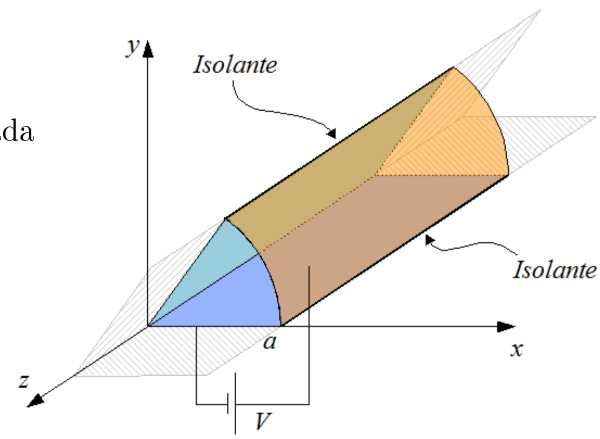
Preparo: Diego Oliveira

Aula 9

Solução da Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Vamos ver como a Equação de Laplace pode ser resolvida em sistemas de coordenadas não cartesianos. Comecemos por coordenadas cilíndricas, vendo uma aplicação de interesse prático.

Consideremos a "cunha cilíndrica"mostrada na figura, formada por dois planos condutores aterrados em $\theta = 0$ e $\theta = \beta$ e uma superfície cilíndrica em $r = a$ polarizada com potencial $\phi = V$. A cunha é infinita na direção z, de forma que o potencial não deve depender da coordenada z. Naturalmente a simetria do problema indica que devemos resolver a *Equação de Laplace* em coordenadas cilíndricas. Assim o problema é especificado como



$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0; \qquad \phi(r,\theta) \tag{1}$$

$$\phi(r,0) = \phi(r,\beta) = 0; \qquad \phi(a,\theta) = V$$

Novamente vamos utilizar o método de separação de variáveis, supondo

$$\phi(r,\theta) = R(r)T(\theta) \tag{2}$$

Substituindo na Equação de Laplace, temos

$$\frac{T}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\frac{d^2T}{d\theta^2}=0$$

ou

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2}=0 \tag{3}$$

O primeiro termo da equação é função só de r, enquanto que o segundo é função só de θ. Como os dois termos têm que se anular para qualquer valores de r e θ, a única possibilidade é que cada termo seja igual a uma constante

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\alpha^2; \qquad \frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2}=-\alpha^2 \tag{4}$$

Equação para R(r)

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\alpha^2 R \tag{5}$$

É fácil de ver que a solução desta equação é

$$R(r)=A_1r^{\alpha}+B_1r^{-\alpha} \qquad [\text{basta derivar } Cr^{\alpha} \text{ e substituir na equação}] \tag{6}$$

Como α ainda é arbitrário, é necessário considerar também a possibilidade de $\alpha=0$, que levaria a $R=const$, que é uma solução trivial. Mas existe uma solução não trivial para este caso, como podemos ver diretamente

$$\begin{gathered}\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=0 \quad \therefore r\frac{dR}{dr}=B_0 \;\therefore\; \frac{dR}{dr}=\frac{B_0}{r} \\ \therefore R(r)=A_0+B_0 ln\, r\end{gathered} \tag{7}$$

Então a solução geral da equação para $R(r)$ é

$$R(r)=A_0+B_0 ln\, r+A_1r^{\alpha}+B_1r^{-\alpha} \tag{8}$$

[O aparecimento do termo $ln\, r$ é uma característica do sistema de coordenadas cilíndricas].

Equação para $T(\theta)$

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} = -\alpha^2 T \qquad \therefore T(\theta) = C_1 cos(\alpha\theta) + D_1 sen(\alpha\theta) \tag{9}$$

Neste caso temos que também considerar o caso espacial $\alpha = 0$.

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{d\theta^2} = 0 \qquad \therefore T(\theta) = C_0 + D_0\theta \tag{10}$$

Então a solução geral para $\phi(r,\theta)$ é

$$\phi(r,\theta) = \underbrace{(A_0 + B_0 ln\, r)(C_0 + D_0\theta)}_{\alpha = 0} + \underbrace{(A_1 r^{\alpha} + B_1 r^{-\alpha})[C_1 cos(\alpha\theta) + D_1 sen(\alpha\theta)]}_{\alpha \neq 0} \tag{11}$$

Condição de Regularidade

Tanto no sistema de coordenadas cilíndricas como esféricas, além das condições de contorno, temos que considerar com cuidado o comportamento da solução quando $r \to 0$, se este ponto fizer parte do domínio onde queremos a solução.

De fato, no limite $r \to 0$, $ln\, r \to \infty$; $r^{-a} \to \infty$ $(\alpha > 0)$; então, para evitar a divergência do potencial em $r = 0$, especificamos

$$B_0 = 0; \quad B_1 = 0 \tag{12}$$

e o potencial fica

$$\phi(r,\theta) = C_0 + D_0\theta + A_1 r^{\alpha}[C_1 cos(\alpha\theta) + D_1 sen(\alpha\theta)] \tag{13}$$

Condições de Contorno

$$\begin{gathered} \underline{\theta = 0} \quad \Rightarrow \quad \phi(r,0) = C_0 + D_1 r^{\alpha} C_1 = 0 \quad \therefore C_0 = C_1 = 0 \\ \therefore \phi(r,\theta) = D_0\theta + A_1 r^{\alpha} sen(\alpha\theta) \end{gathered} \tag{14}$$

onde combinamos D_1 na constante A_1.

$$\underline{\theta = \beta} \quad \Rightarrow \quad \phi(r,\beta) = D_0\beta + A_1 r^{\alpha} sen(\alpha\beta) = 0 \tag{15}$$

Fazemos então $D_0 = 0$; se fazermos também $A_1 = 0$, obtemos a solução trivial $\phi(r,\theta) = 0$. A outra possibilidade é considerar

$$\alpha\beta = m\pi; \; m = 1, 2, 3 \ldots \quad \therefore \alpha = \frac{m\pi}{\beta} \tag{16}$$

Então a solução geral fica

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} = A_m r^{\frac{m\pi}{\beta}} sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) \\ \underline{r = a} \quad \Rightarrow \quad V &= A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}} sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Usando novamente a condição de ortogonalidade das funções trigonométricas, temos

$$V \int_0^\beta sen\left(\frac{m'\pi\theta}{\beta}\right) d\theta = \sum_m A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}} \int_0^\beta sen\left(\frac{m'\pi\theta}{\beta}\right) sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) d\theta \tag{18}$$

Essas integrais já foram feitas anteriormente,

$$\begin{aligned} &\int_0^\beta sen\left(\frac{m'\pi\theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{2\beta}{m'\pi\theta}; \; m' \text{ ímpar;} \\ &\int_0^\beta sen\left(\frac{m'\pi\theta}{\beta}\right) sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{\beta}{2}\delta_{m'm} \end{aligned} \tag{19}$$

Então

$$\frac{2\cancel{\beta}}{m'\pi} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}} \frac{\cancel{\beta}}{2} \delta_{m'm}; \quad m' \text{ ímpar} \tag{20}$$

e obtemos

$$A_m = \frac{4V}{m\pi} a^{-\frac{m\pi}{\beta}} \tag{21}$$

De forma que o potencial "dentro"da cunha fica

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}} sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)} \tag{22}$$

Campo Elétrico

Tendo o potencial, podemos calcular diretamente o campo elétrico dentro da cunha

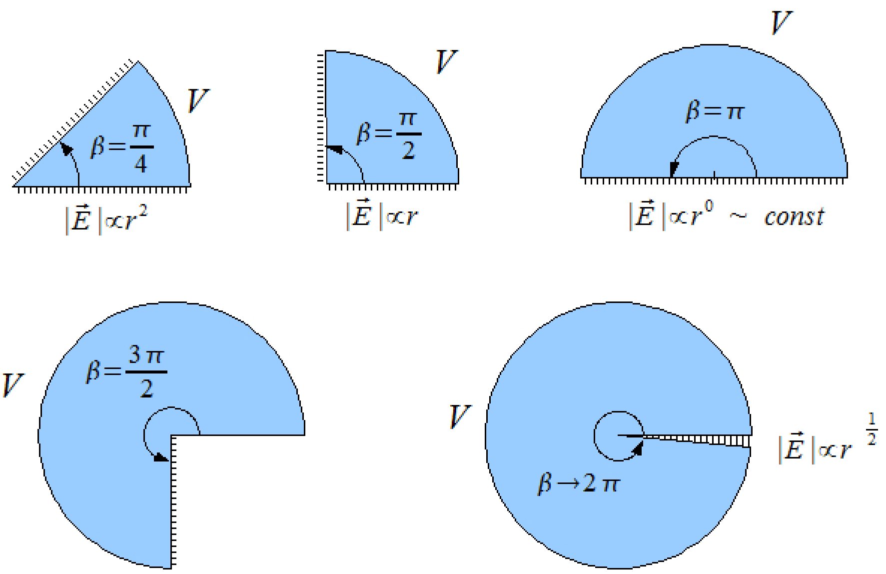
$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{4V}{\beta a}\sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{4V}{\beta a}\sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} cos\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) \tag{23}$$

É interessante agra verificar o comportamento do campo próximo da origem, ou seja, quando $r \to 0$. Neste limite o termo dominante no somatório é o com menor potência de r, ou seja, o termo $m = 1$; então temos

$$\begin{array}{l} E_r \approx -\frac{4V}{\beta a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} sen\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) \\ E_\theta \approx -\frac{4V}{\beta a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} cos\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad |E| \approx \frac{4V}{\beta a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{\beta}-1} \tag{24}$$

O valor do ângulo β da cunha é arbitrário; então vamos ver como se comporta o campo quando variamos o valor de β; isto é indicado nas figuras a seguir



Vemos que quando $\beta > \pi$, o campo tende a divergir na ponta da cunha, ou seja, aumentaria sua intensidade na ponta, o que é denominado "Poder das Pontas" na linguagem popular.

Exercício

Calcular a expressão de densidade de carga σ na superfície $r = a$ e a da capacitância por unidade de comprimento na direção L, ou seja, C/L.

Separação de Variáveis em Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, a Equação de Laplace é dada por

$$\nabla^2\phi(r,\theta,\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{25}$$

Devido a $sen^2\theta$ aparecer na derivada em relação a φ, não é imediato fazer a separação de variáveis diretamente nas coordenadas r, θ e φ. Por isso, vamos considerar primeiro a separação em r; fazendo

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \tag{26}$$

onde a função Y depende tanto de θ como de φ. Substituindo na Equação de Laplace, temos

$$\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{27}$$

Multiplicando todos os termos desta equação por r^2/RY, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y sen^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{28}$$

O primeiro termo da equação só depende de r, enquanto que o segundo e o terceiro dependem de θ e φ. Como eles tem quem se anular para quais valores de r, θ e φ, fazemos

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \alpha^2; \quad \frac{1}{Y sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\alpha^2 \tag{29}$$

Equação para R(r)

Iniciaremos com a equação para a função radial,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \alpha^2 R \tag{30}$$

Conforme explicaremos em aula, equações deste tipo em que a "dimensão" de todos os termos seja a variável dependente (R, neste caso) a solução deve ser a variável independente elevada a uma potência. Assim, vamos supor que a solução seja dada por

$$R = Cr^a; \quad C \text{ e } a \text{ constante} \tag{31}$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{gathered} Ca(a+1)r^a = \alpha^2 C r^a \quad \Rightarrow \quad a(a+1) = \alpha^2 \\ \therefore a = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1+4\alpha^2}] \end{gathered} \tag{32}$$

Esta constante pode ser expressa de forma mais conveniente introduzindo uma outra constante, β, relacionada com α através da expressão

$$\alpha^2 = \beta(\beta+1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{(1+2\beta)^2}] = \frac{1}{2}[-1 \pm (1+2\beta)] \tag{33}$$

Assim, as duas raízes são $a_1 = \beta$ e $a_2 = -(1+\beta)$, de forma que a solução geral para $R(r)$ é

$$\boxed{R(r) = Ar^{\beta} + Br^{-(\beta+1)}} \tag{34}$$