

Matemática III

2º Semestre de 2020

4ª Prova - Peso 1 - 2020

1. **Entrega:** Até 10/01/2021

2. Além do enunciado das questões da 4a. Prova, estão presentes aqui alguns exercícios para complementar o aprendizado, que não precisam ser entregues.

BOA PROVA!

PARTE I - Topologia do \mathbf{R}^n

Exercício 1 Mostre que em \mathbf{R}^2 o “quadrado sem contorno” $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbf{R}^2$ é um subconjunto aberto.

Questão 1 (1.0) Mostre que se $F \subset \mathbf{R}^n$ é fechado e $A \subset \mathbf{R}^n$ é aberto, então $F \setminus A$ é fechado.

Questão 2 (1.5) Na tabela abaixo, $M = \mathbf{R}$ ou $M = \mathbf{R}^2$ conforme indicado, e X é um subconjunto de M . Considere $\cup_n A_n = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

M	$X \subset M$	$\overset{\circ}{X}$	∂X	X'	\bar{X}	X é aberto?	X é fechado?
\mathbf{R}	$\cap_n (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$						
\mathbf{R}	$\cup_n [\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}]$						
\mathbf{R}^2	$\cup_n B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$						

Exercício 2 Decida se cada subconjunto de \mathbf{R}^2 abaixo tem ou não algum ponto de acumulação. Justifique sua resposta.

- (a) $\{(1/n, 1/n) \mid n \in \mathbf{N}\}$. (b) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. (c) $A \times \{0\}$ onde $A \subset \mathbf{R}$ é aberto, não vazio.

PARTE II - Topologia de Espaços Métricos

Exercício 3 Sejam (M, d) um espaço métrico e $H \subset M$ aberto não vazio, e $p \in H$. Mostre que $H \setminus \{p\}$ é aberto.

Exercício 4 Seja (M, d) um espaço métrico, e $A \subset M$ aberto, não vazio. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique:

- (a) A é uma união de bolas abertas.
(b) A é uma união de bolas fechadas.

Questão 3 (1.5) Na tabela abaixo, considere M como espaço métrico com a métrica discreta, e seja X o subconjunto de M indicado. Considere $\cup_n A_n = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

M	$X \subset M$	$\overset{\circ}{X}$	∂X	X'	\bar{X}	X é aberto?	X é fechado?
\mathbf{R}	$\cap_n (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$						
\mathbf{R}	$\cup_n [\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}]$						
\mathbf{R}^2	$\cup_n B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$						

Exercício 5 Seja $M = \mathbf{R}^2$ com a métrica $\tilde{d}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, d_*(x_2, y_2)\}$, onde $d_*(t, s) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq s \\ 0 & \text{se } t = s \end{cases}$ é a métrica discreta em \mathbf{R} .

Considere os subconjuntos de M dados, e complete a tabela:

$X \subset M$	X é aberto?	Justificativa	X é limitado?	Justificativa
$A = (0, 1) \times (0, 1)$				
$B = [0, 1] \times [0, 1]$				
$C = [0, 1] \times (0, 1)$				
$D = (0, 1) \times [0, 1]$				
$A = \mathbf{N} \times (0, 1)$				
$B = (0, 1) \times \mathbf{N}$				
$C = \mathbf{N} \times [0, 1]$				
$D = [0, 1] \times \mathbf{N}$				

Exercício 6 Mostre que as normas $\| \cdot \|_2$ e $\| \cdot \|_\infty$ são equivalentes em $V = \mathbf{R}^k$.

PARTE III - Sequências em \mathbf{R}^k

Exercício 7 Seja $(x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k))_{n \in \mathbf{N}}$ uma sequência em $M = \mathbf{R}^k$

[respectivamente, em $M = \mathbf{R}_+^{*k} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \dots \times (0, \infty) \subset \mathbf{R}^k$]

e seja $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^k) \in M = \mathbf{R}^k$

[respectivamente, em $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^k) \in M = \mathbf{R}_+^{*k} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \dots \times (0, \infty) \subset \mathbf{R}^k$].

Mostre que vale a afirmação:

$$x_n \rightarrow \bar{x} \iff x_n^i \rightarrow \bar{x}^i \text{ para } i = 1, 2, \dots, k.$$

Questão 4 (1.0) Decida se cada uma das sequências abaixo converge em \mathbf{R}^3 , e em caso afirmativo, calcule seu limite. Justifique suas afirmações.

(a) $x_n = (\frac{n}{n^2+1} + e^{-n}, \frac{\sin 2n}{n}, a + a^2 + a^3 + \dots + a^n)$, $n \in \mathbf{N}$, onde $a \in (-1, 1)$.

(b) $x_n = (ne^{-n}, \cos \frac{1}{n}, (-1)^n)$, $n \in \mathbf{N}$.

(c) $x_n = (\frac{\ln n}{n}, \frac{\sin n}{n}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$.

Exercício 8 Mostre que em \mathbf{R}^k , toda sequência de Cauchy é convergente, isto é, ele é um espaço métrico completo.

PARTE IV - Sequências em Espaços Métricos

Exercício 9 Releia o exercício 7.

A afirmação continua válida para sequências em M e $\bar{x} \in M$ se usarmos

$$M = \mathbf{R}_+^{*k} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \dots \times (0, \infty)$$

com a distância

$$d(x, y) = d((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \|(x_1, \dots, x_{k-1}) - (y_1, \dots, y_{k-1})\| + |\frac{1}{x_k} - \frac{1}{y_k}|?$$

Exercício 10 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é convergente num espaço métrico (M, d) , então ela é limitada.

Exercício 11 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é limitada num espaço métrico (M, d) e $p \in M$, então existe $r > 0$ tal que $x_n \in B_r(p)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Exercício 12 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é convergente num espaço métrico (M, d) , então ela é uma sequência de Cauchy.

Questão 5 (2.0) Seja $M = C([0, 1])$ com a norma $\| \cdot \|_i$ e considere em M a sequência $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definida por $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$. Seja $\bar{f} \in M$ a função nula.

Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique sua resposta.

(a) Com a métrica dada por $\| \cdot \|_1$, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge para \bar{f} .

(b) Com a métrica dada por $\| \cdot \|_2$, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge para \bar{f} .

(c) Com a métrica dada por $\| \cdot \|_\infty$, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge para \bar{f} .

PARTE V - Continuidade de funções de \mathbf{R}^p em \mathbf{R}^q

Exercício 13 Sejam $f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in \mathbf{R}^p$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= (f_1(x_1, x_2, \dots, x_p), f_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, x_2, \dots, x_p)) \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)). \end{aligned}$$

(a) Usando a definição de continuidade, mostre que

$$f \text{ é contínua em } \bar{x} \iff f_1, f_2, \dots, f_q : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R} \text{ são contínuas em } \bar{x}.$$

(b) Usando a caracterização de continuidade por sequências, mostre que

$$f \text{ é contínua em } \bar{x} \iff f_1, f_2, \dots, f_q : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R} \text{ são contínuas em } \bar{x}.$$

Questão 6 (1.0) Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique.

$$\text{“A função } H(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua em $(0, 0)$.”

Questão 7 (1.0) Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique.

$$\text{“A função } G(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua em $(0, 0)$.”

Questão 8 (1.0) Seja $f(x, y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Determinar o limite de f quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?