MAP2110 Modelagem e Matemática
$1^{\underline{\text{O}}}$ Semestre de 2004

Determinante

Bibliografia:
Cálculo, vol. 2, Tom M. Apostol

Notação

• $\mathcal{M}_{n\times n} =$ conjunto das matrizes reais $n \times n$.

• $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

• $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ denotarão pontos de $\mathbf{R}^n$ correspondentes às linhas da matriz A, isto é, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}),\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Assim, se I é a matriz identidade $n \times n$ teremos
$I_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ I_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ I_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$.

• Se $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ é uma função qualquer que a cada matriz real A, $n\times n$, associa um número real $f(A)$, usaremos $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) := f(A)$.

Definição 1 (Definição axiomática)

Uma função $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *que a cada matriz real* A, $n\times n$, *associa um número real* $d(A)$, *é* **uma função determinante** *se satisfaz os seguintes axiomas:*

Axioma 1: (Homogeneidade em cada linha) *Se* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *então*

$$d(A_1, \ldots, \alpha A_k, \ldots, A_n) = \alpha d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n), \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Axioma 2: (Aditividade em cada linha) *Se* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *então*

$$d(A_1, \ldots, A_k+C_k, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n)+d(A_1, \ldots, C_k, \ldots, A_n),$$
$$\forall C_k = (c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kn}) \in \mathbf{R}^n.$$

Axioma 3: (d se anula se duas linhas são iguais) *Se* $1 \leq i < k \leq n$ *então*

$$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = 0, \text{ se } A_i = A_k.$$

Axioma 4: (Normalização)

$$d(I) = d(I_1, I_2, \ldots, I_n) = 1.$$

É claro que as igualdades apresentadas nos axiomas 1, 2 e 3 podem ser reescritas respectivamente como

$$d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \alpha d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right),$$

$$d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}+c_{k1} & \cdots & a_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right),$$

$$d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Exercício 1 Mostre que em presença dos axiomas 1 e 2, o axioma 3 é equivalente ao axioma $3'$, onde

Axioma $3'$: (d se anula se duas linhas consecutivas são iguais)

$$d(A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = 0, \ \textit{se } A_k = A_{k+1}.$$

Obs.: *Deve-se mostrar que:*

"se d satisfaz os axiomas 1 e 2, então d satisfaz o axioma 3 se, e só se, d satisfaz o axioma $3'$",

isto é,

deve-se mostrar que:

"se d satisfaz os axiomas 1 e 2, e ainda o axioma 3, então d satisfaz o axioma $3'$",

e que:

"se d satisfaz os axiomas 1 e 2, e ainda o axioma $3'$, então d satisfaz o axioma 3".

Novo grupo de axiomas

Considere o novo grupo de axiomas dado abaixo:

Axioma 1a: (Homogeneidade na primeira linha)

$$d(\alpha A_1, A_2, \ldots, A_n) = \alpha d(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Axioma 2a: (Aditividade na primeira linha)

$$d(A_1 + C_1, A_2, \ldots, A_n) = d(A_1, A_2, \ldots, A_n) + d(C_1, A_2, \ldots, A_n),$$
$$\forall C_1 = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}) \in \mathbf{R}^n.$$

Axioma 3a: (Alternação) Se $1 \leq i < k \leq n$ então

$$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = -d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$

Exercício 2 Mostre que em presença dos axiomas 1 e 2, o axioma 3 é equivalente ao axioma 3a

Exercício 3 Mostre que em presença do axioma 3a, o axioma 1 é equivalente ao axioma 1a

Exercício 4 Mostre que em presença do axioma 3a, o axioma 2 é equivalente ao axioma 2a

Exercício 5 Mostre que os axiomas 1, 2 e 3 da definição anterior são equivalentes aos axiomas 1a, 2a e 3a,
isto é,
que qualquer função que satisfaça os axiomas 1, 2 e 3 da definição anterior satisfaz também os axiomas 1a, 2a e 3a, e reciprocamente, que qualquer função que satisfaça os axiomas 1a, 2a e 3a satisfaz também os axiomas 1, 2 e 3 da definição.

Nomenclatura

Seja $d : \mathcal{M}_{n \times n} \to \mathbf{R}$ uma função.

- Se d satisfaz os axiomas 1a e 2a, d é dita uma *função linear na primeira linha* de A.
- Se d satisfaz os axiomas 1 e 2, d é dita uma *função multilinear nas linhas* de A.
- Se d satisfaz o axioma 3a, d é dita uma *função alternada nas linhas* de A.

- Se d satisfaz o axioma 1, 2 e 3a (ou equivalentemente, os axiomas 1, 2 e 3, ou ainda, os axiomas 1a, 2a e 3a) d é dita uma *função multilinear alternada nas linhas* de A.

- E, é claro,

  Se d satisfaz o axioma 1, 2, 3 e 4 (ou equivalentemente, os axiomas 1a, 2a, 3a e 4) d é dita uma *função determinante*.

Teorema 1 (Propriedades de uma função multilinear alternada)
Uma função $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ satisfazendo os axiomas 1, 2 e 3 satisfaz também as seguintes propriedades:

(MA1) $d(A) = 0$ *se A tem uma linha de zeros, isto é,*

$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = 0$ *se* $A_i = (0, 0, \ldots, 0)$ *para algum* i.

(MA2) *A função d muda de sinal se duas linhas consecutivas são permutadas, isto é,*

$d(A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = -d(A_1, \ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots, A_n)$.

(MA3) *A função d muda de sinal se duas linhas quaisquer são permutadas, isto é, se $1 \leq i < k \leq n$ então*

$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = -d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$.

(MA4) *A função d se anula se duas linhas quaisquer são iguais, isto é, se $1 \leq i < k \leq n$ e $A_i = A_k$ então*

$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = 0$.

(MA5) *A função d se anula se as linhas de A são linearmente dependentes.*

Prova:

■

Exercício 6

(i) Mostre que se $d : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}$ *é uma função determinante então*

$$d(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(ii) Conclua que existe no máximo uma função determinante

$$d : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}.$$

(iii) Mostre que $\det : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}$ *definida por* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *é uma função determinante, isto é, mostre que ela satisfaz os axiomas 1,2,3 e 4.*

(iv) Conclua que existe uma e uma só (isto é, exatamente uma) função determinante para matrizes 2×2*, e que ela é dada por*

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exercício 7 *Mostre que se existir uma função determinante*

$$d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$$

então se $V \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *for uma matriz diagonal teremos* $d(V) = v_{11}v_{22}\cdots v_{nn}$.

Exercício 8 *Mostre que se existir uma função* $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *satisfaz os axiomas 1, 2 e 3 então se* B *é a matriz obtida de* A *adicionando-se a uma linha de* A *um múltiplo de outra linha de* A*, resulta que* $d(B) = d(A)$*, isto é, se* $1 \leq i < k \leq n$*,*

$d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k + \alpha A_i, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$ *e*
$d(A_1, \ldots, A_i + \beta A_k, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$.

Observação 1 Lembremos que, ao aplicar o Método de Gauss-Jordan (isto é, fazer o Escalonamento Reduzido por Linhas) a uma matriz, usamos sucessivamente três tipos de operações:

GJ1 *Permutação de duas linhas.*

GJ2 *Divisão de uma linha por um escalar* α *não nulo.*

GJ3 *Adição a uma linha de um múltiplo de outra linha.*

Se partirmos de uma matriz A quadrada $n \times n$, chegaremos, após aplicar um número finito de tais operações, ou na matriz identidade $\widetilde{A} = I$ ou numa matriz $\widetilde{A}$ que tem uma linha de zeros.

Se $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ satisfaz os axiomas 1, 2 e 3, então:

- *se* C *é s matriz obtida a partir de* B *pelo uso da operação* **GJ1** *uma vez, resulta que* $d(B) = -d(C)$*,*

- *se C é s matriz obtida a partir de B pelo uso da operação* **GJ2** *uma vez, resulta que $d(B) = \alpha d(C)$,*

- *se C é s matriz obtida a partir de B pelo uso da operação* **GJ3** *uma vez, resulta que $d(B) = d(C)$.*

Conclusão: Vale o seguinte resultado:

Proposição 1 *Se $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ satisfaz os axiomas 1, 2 e 3 e ao aplicarmos o Método de Gauss-Jordan a uma matriz A para obtermos a matriz correspondente $\widetilde{A}$ tivermos feito*

s operações do tipo **GJ1**,

r operações do tipo **GJ2** com escalares não nulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ respectivamente, e

ℓ operações do tipo **GJ3**,

obteremos

$$d(A) = (-1)^s \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r d(\widetilde{A}).$$

Exercício 9 *Mostre que se existir uma função determinante*

$$d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$$

então

(i) se $U \in \mathcal{M}_{n\times n}$ for uma matriz triandular superior com elementos da diagonal não nulos então $d(U) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.

(ii) se $U \in \mathcal{M}_{n\times n}$ for uma matriz triandular superior com algum elemento da diagonal igual a zero então $d(U) = 0 = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.

Teorema 2 (UNICIDADE) *Existe no máximo uma função determinante para matrizes $n \times n$, isto é, existe no máximo uma função definida em $\mathcal{M}_{n\times n}$ a valores em $\mathbf{R}$ satisfazendo os axiomas 1, 2, 3 e 4.*

Prova:

$\blacksquare$

Proposição 2 *Se* $d : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *e* $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *satisfazem os axiomas 1, 2 e 3, e d satisfaz ainda o axioma 4, então*

$$f(A) = d(A)f(I).$$

Prova:

$\blacksquare$

Exercício 10 *Mostre que* $\det : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathbf{R}$ *definida por*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

é uma função determinante para matrizes 3×3 *(e é a única, pelo Teorema de Unicidade).*

Ainda não mostramos que existe função determinante para matrizes $n\times n$, exceto quando $n = 2$ (exercício 3) e quando $n = 3$ (exercício 7). Abaixo provaremos indutivamente que existe função determinante para matrizes $n \times n$,

Se $n \geq 1$, para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotemos por A_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz A.

Teorema 3 (Desenvolvimento pela primeira coluna)

Sejam $\det_1, \det_2, \det_3, \ldots, \det_n, \ldots$ *as funções definidas indutivamente por*

$\det_1 : \mathcal{M}_{1\times 1} \to \mathbf{R}$ *é dada por* $\det_2 A = a_{11}$,

$\det_2 : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}$ *é dada por* $\det_2 A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

e, para $n \geq 1$,

$\det_n : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *é dada por* $\det_n A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det_{n-1} A_{i1}$.

Então $\det_n : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *é uma função determinante para matrizes* $n \times n$ *(a única, devido ao Teorema de Unicidade!)*

Observação 2

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + \cdots + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1}. \end{aligned}$$

Prova: Será feita por indução sobre n.

(Idéia:)

Caso inicial: Provar que o caso inicial da indução (n=1), isto é, provar que $\det_1$ satisfaz os axiomas 1, 2, 3 (ou $3'$) e 4.

Passo de Indução: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz os axiomas 1, 2, 3 (ou $3'$) e 4, e provar que $\det_n$ também satisfaz os axiomas 1, 2, 3 (ou $3'$) e 4.

$1^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 1 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 1a.

$2^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 1 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 1.

$3^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 2 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 2a.

$4^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 2 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 2.

$5^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 3 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 3.

$6^{\underline{O}}$ Passo: Concluir que $\det_{n-1}$ satisfaz os axiomas 1, 2 e 3 então $\det_n$ satisfaz os axiomas 1, 2 e 3.

$7^{\underline{O}}$ Passo: Supor que $\det_{n-1}$ satisfaz o axioma 4 e provar que $\det_n$ satisfaz o axioma 4.

$8^{\underline{O}}$ Passo: Concluir que $\det_{n-1}$ satisfaz os axiomas 1, 2, 3 e 4 então $\det_n$ satisfaz os axiomas 1, 2, 3 e 4.

$\blacksquare$

Outra forma de mostrar a existência

Teorema 4 (Usando produtos elementares com sinal)

Considere a função $\det :: \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ *definida por*

$$\det A = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} (-1)^{\epsilon(j_1,j_2,\ldots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

onde
$(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *é permutação de* $(1, 2, \ldots, n)$*,*
$\epsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *é a ordem da permutação* $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$*,*
e a somatória é feita em todas as permutações.

Então $\det$ *é uma função determinante para matrizes* $n \times n$ *(a única, devido ao Teorema de Unicidade!)*

Prova:

∎

Determinante do produto

Na demonstração do próximo teorema, para A e B matrizes $n \times n$ indicaremos por A_iB tanto a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

que resulta uma matriz $1 \times n$, quanto o ponto do $\mathbf{R}^n$ correspondente à única linha dessa matriz.

Exercício 11 *Mostre que nas notações anteriores, A_iB tem exatamente os elementos da linha i da matriz AB.*

Proposição 3 *Se A e B são matrizes $n \times n$ e det : $\mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ é a função determinante então*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Prova:

Fixe a matriz B.

A matriz produto $C = AB$ tem como linhas $C_1 = A_1B, C_2 = A_2B, \ldots, C_n = A_nB$.

Considere a função $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(A) = \det(AB) = \det(A_1B, A_2B, \ldots, A_nB).$$

Vamos mostrar que f satisfaz os axiomas 1, 2 e 3.

Pela proposição 2 segue que $f(A) = \det(A) f(I)$.
Como $f(I) = \det(B)$ (VERIFIQUE!) seque que

$$\det(AB) = f(A) = \det(A)\det(B).$$

■

Exercício 12 *Se A é inversível então* $\det A \neq 0$ *e*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$