Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Engenharia de Biossistemas

APONTAMENTOS DE AULA PRÁTICA

Capítulo 1 – Revisão de Trigonometria e Geometria Analítica

Material integrante da apostila de apoio à disciplina
LEB0340 – Topografia

Responsável: Prof. Dr. Peterson Ricardo Fiorio
Colaboradores: Dra. Érica Nakai
Isa Marchini Rolisola

Piracicaba
2019

1 REVISÃO

1.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras está relacionado com o comprimento dos lados do triângulo retângulo (Figura 1). Essa figura geométrica é formada por um ângulo interno de 90°, chamado de ângulo reto.

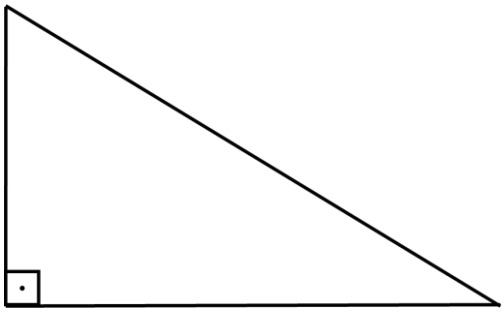


Figura 1 - Triângulo retângulo.

O enunciado desse teorema é: "a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa."

$$hipotenusa^2 = \ cateto\ 1^2 + \ cateto\ 2^2$$

A hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo e o lado oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados são os catetos (Figura 2). O ângulo formado por esses dois lados tem medida igual a 90º (ângulo reto).

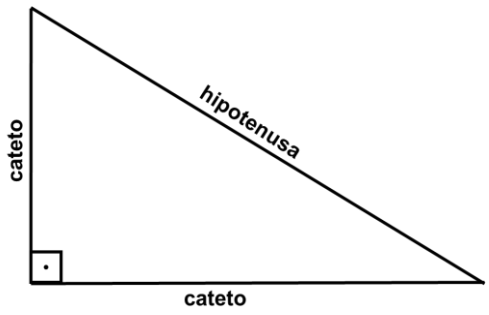


Figura 2 - Hipotenusa e catetos do triângulo retângulo.

Os catetos são identificados de acordo com um determinado ângulo. O cateto pode ser chamado de adjacente ou oposto.

Quando o cateto é uma das linhas que forma o ângulo de referência, ele é chamado de adjacente, e a linha oposta ao ângulo é chamada de oposto.

Observe na Figura 3 que o nome do cateto altera conforme se altera o ângulo de referência.

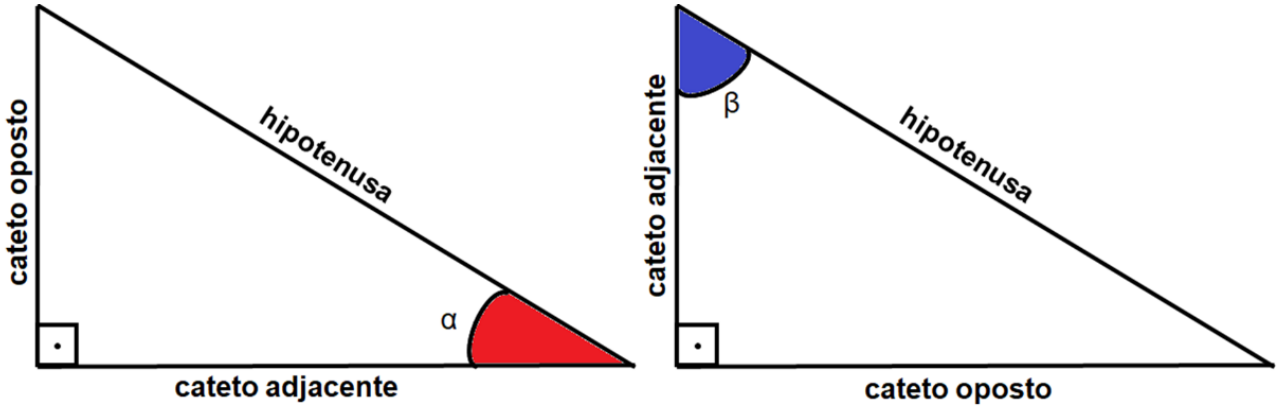


Figura 3 - Catetos para cada ângulo de referência do triângulo retângulo.

Do enunciado do Teorema, é determinada a equação mostrada a seguir:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Sendo h a hipotenusa e a e b os catetos, conforme a Figura 4.

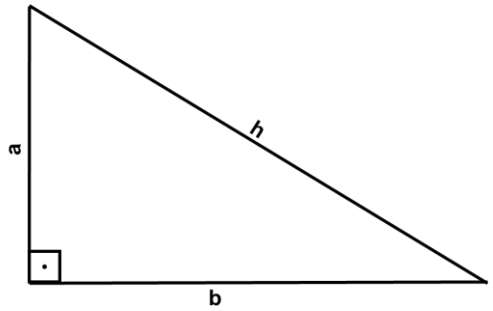


Figura 4

Disso, é possível calcular as medidas de cada lado do triângulo retângulo, como mostram as equações a seguir:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

1.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere o triângulo retângulo da Figura 5.

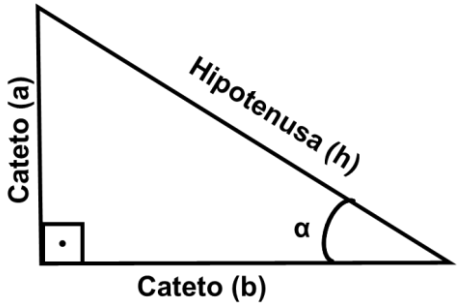


Figura 5 - Triângulo retângulo

A partir do triângulo, se estabelecem as funções trigonométricas de seno, cosseno e tangente, conforme mostram as equações a seguir:

$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Tomando como exemplo o ângulo α, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{h}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{h}$$

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

1.3 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O Círculo Trigonométrico é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico, o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Cada ponto está associado aos valores dos ângulos.

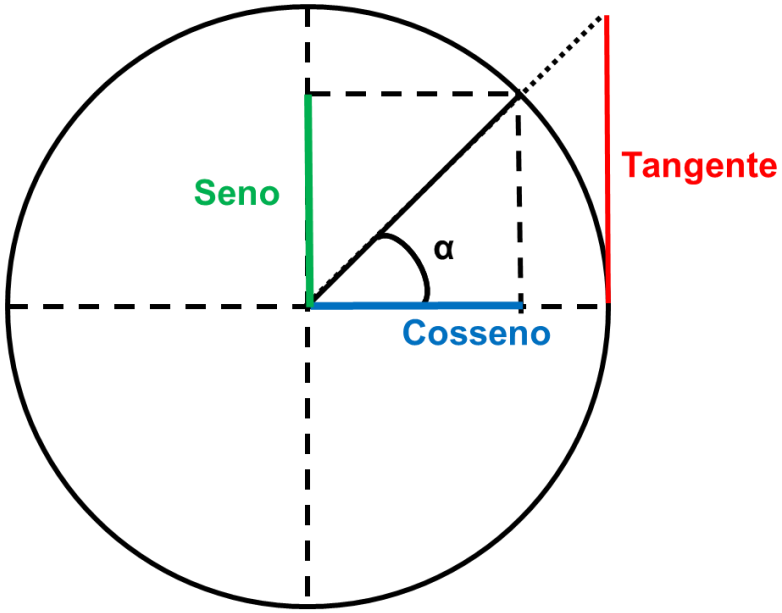


Figura 6 - Círculo trigonométrico.

1.3.1 QUADRANTES DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Dividindo o círculo trigonométrico em quatro partes iguais, temos os quatro quadrantes que o constituem (Figura 7).

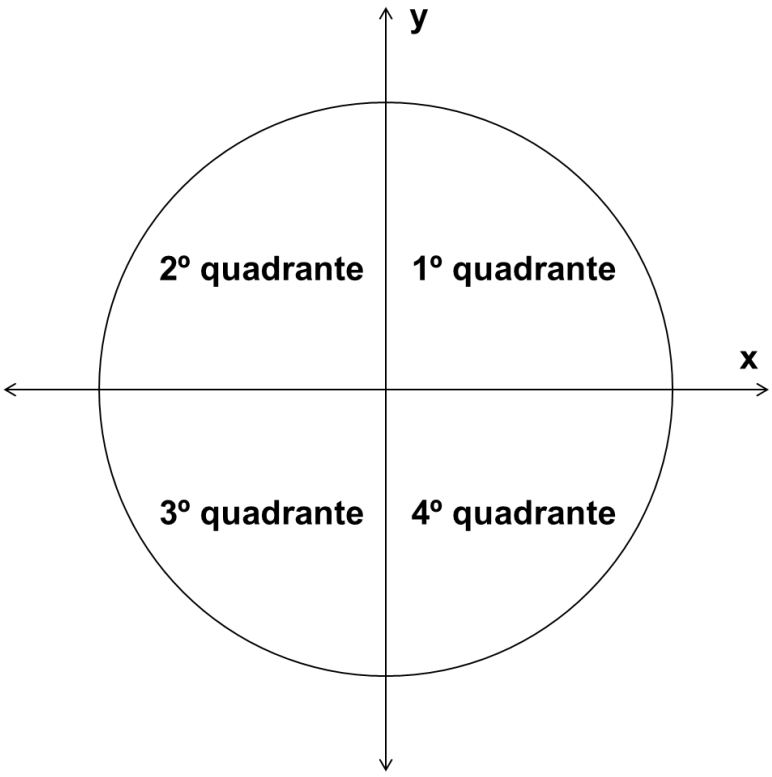


Figura 7 - Quadrantes do círculo trigonométrico.

1.3.2 SINAIS DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

De acordo com o quadrante em que está inserido, os valores do seno, cosseno e tangente variam (Figura 8).

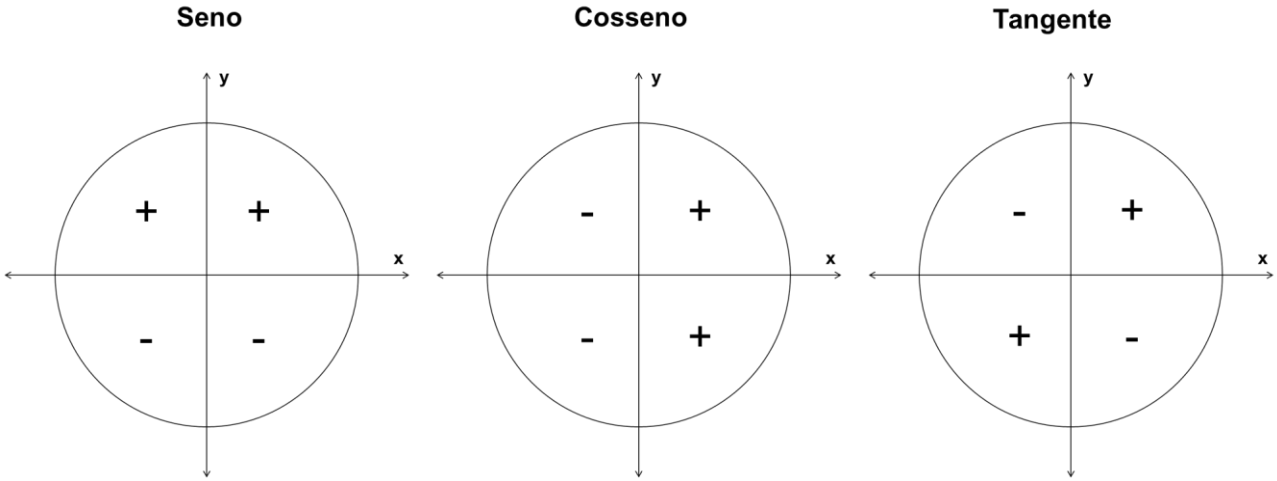


Figura 8 - Sinais das funções seno, cosseno e tangente, para cada quadrante.

1.4 LEI DOS SENOS

A Lei dos Senos determina que em um triângulo qualquer, a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo.

Nesse caso, considera-se um triângulo qualquer ABC de lados a, b, c, conforme Figura 9.

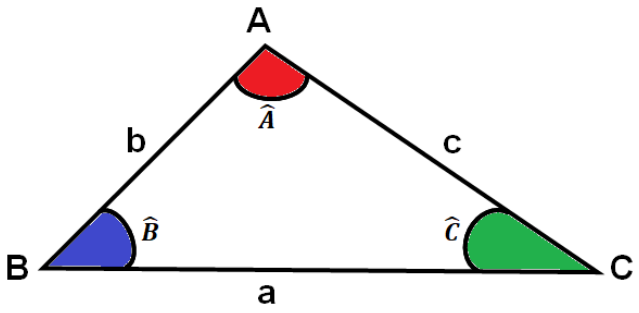


Figura 9 - Triângulo e seus respectivos lados e ângulos.

A Lei dos Senos consiste nas relações mostradas a seguir:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

1.5 LEI DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos é utilizada para o cálculo a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas.

A Lei determina que “em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."

Nesse caso, considera-se um triângulo qualquer ABC de lados a, b, c, conforme Figura 10.

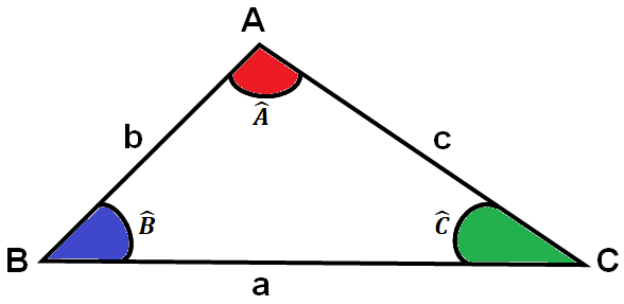


Figura 10 - Triângulo e seus respectivos lados e ângulos.

A Lei dos Cossenos consiste nas relações mostradas a seguir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\ \cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\ \cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\ \cos\hat{C}$$

1.6 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO REGULAR

Em um polígono regular qualquer, a soma dos ângulos internos equivale ao número de lados do polígono menos dois multiplicado por 180°, conforme mostrado na equação a seguir:

$$\boldsymbol{Si = (n - 2)\ x\ 180°}$$

Onde,

Si = Soma dos ângulos internos, e

N = Número de lados do polígono.

Por exemplo, para o triângulo, temos:

$$Si = (n\ -2)\ x\ 180°$$
$$Si = (3\ -2)\ x\ 180°$$
$$Si = (1)\ x\ 180°$$
$$Si =\ 180°$$

Para um quadrado, temos:

$$Si = (n\ -2)\ x\ 180°$$
$$Si = (4\ -2)\ x\ 180°$$
$$Si = (2)\ x\ 180°$$
$$Si =\ 360°$$

1.7 PLANO CARTESIANO

O Plano cartesiano é um método que consiste em dois eixos perpendiculares que pertencem a um plano em comum. Esse método foi criado pelo matemático Descartes com o objetivo de demostrar a localização de alguns pontos no espaço.

O Plano Cartográfico consiste em uma linha vertical chamada de eixo das ordenadas (eixo dos Y) e em uma linha horizontal chamada de eixo das abscissas (eixo dos X). Com a intersecção dessas linhas há a formação de 4 quadrantes, cada um com um sinal para X e para Y.

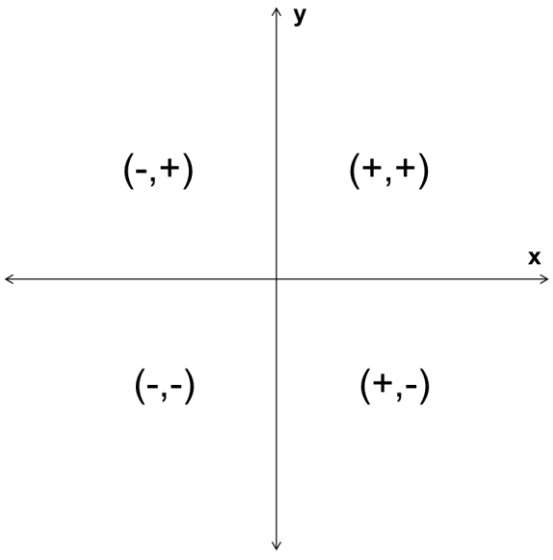


Figura 11 - Plano Cartográfico mostrando os eixos das ordenadas e abscissas e os valores positivos ou negativos de X e de Y.

1.8 COORDENADAS

As coordenadas cartesianas (ou retangulares), são dadas pelos pares ordenados com valores de X e de Y (X;Y).

Na Figura 12, a seguir, as coordenadas dos pontos plotados (marcados) são:

- Ponto A = (+3;+4)
- Ponto B = (+6;-2)
- Ponto C = (-7;-3)
- Ponto D = (-5;+2)

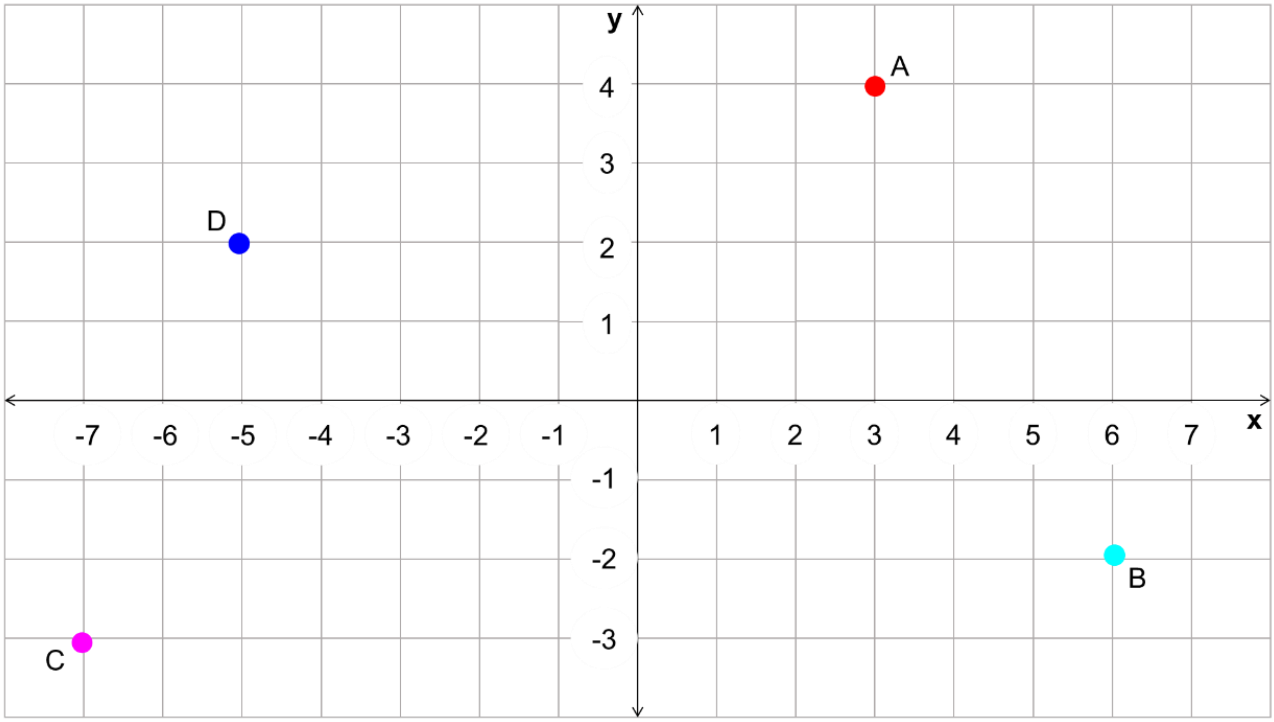


Figura 12 - Plano cartesiano com pontos plotados.

As coordenadas polares de um ponto são dadas utilizando um ângulo e uma distância (ex.: 30°15’10”; 50 m). O ângulo, na Topografia, é denominado Azimute (Az), e consiste no ângulo que uma reta até o ponto em questão faz com o Norte. A distância, denominada Distância Horizontal (DH) refere-se a medida dessa reta (Figura 13).

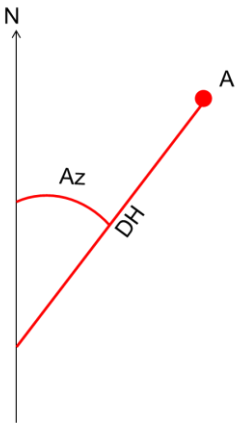


Figura 13 – Azimute e Distância Horizontal para o Ponto A

Mais informações sobre esses conceitos serão fornecidas nos capítulos seguintes.

Com essas coordenadas polares, associando com o Círculo Trigonométrico, é possível calcular as coordenadas retangulares.

Essa relação é dada por:

$$X = sen\ (Az)\ x\ DH$$

$$Y = cos\ (Az)\ x\ DH$$

Para obter X, com base na Figura 14, temos:

$$X = \ sen\ (Az) x\ DH \ \text{ e } sen\ (Az) = \frac{\Delta X}{DH},$$

$$\text{logo } \frac{\Delta X}{DH}\ x\ DH = \ \Delta X = X$$

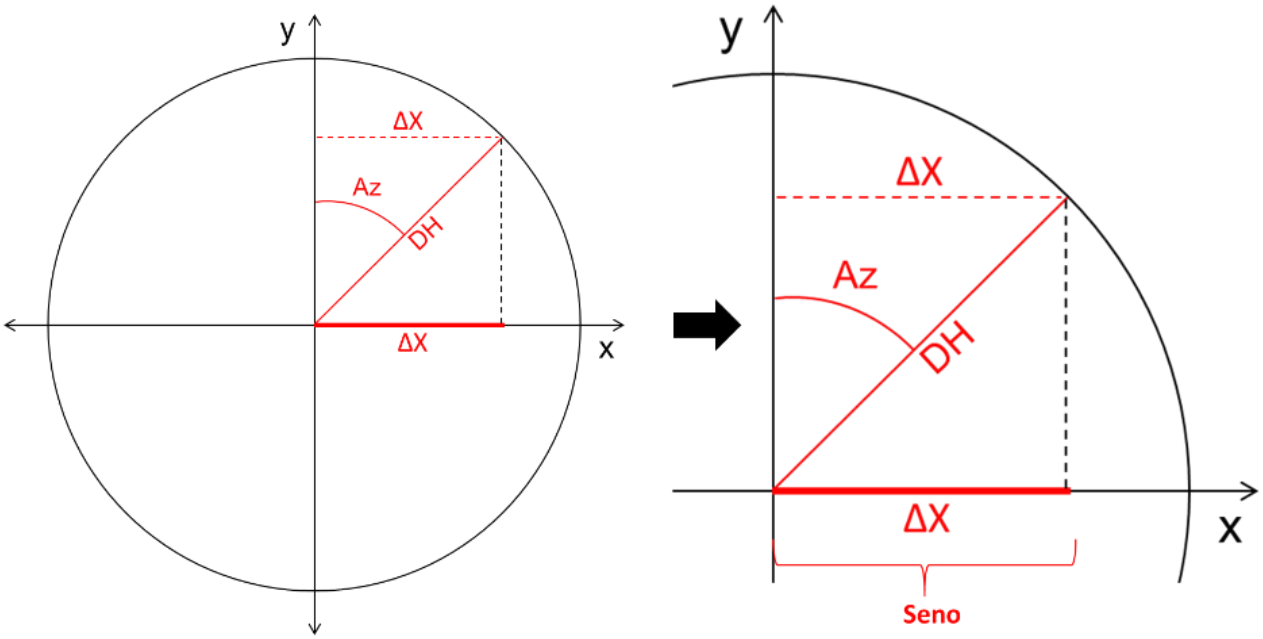


Figura 14 - Relação das coordenadas polares com as coordenadas retangulares para X.

Para obter Y, com base na Figura 15, temos:

$$Y = cos\,(Az)x\,DH \text{ e } cos\,(Az) = \frac{\Delta Y}{DH},$$

$$\text{logo } \frac{\Delta Y}{DH}\ x\ DH = \Delta Y = X$$

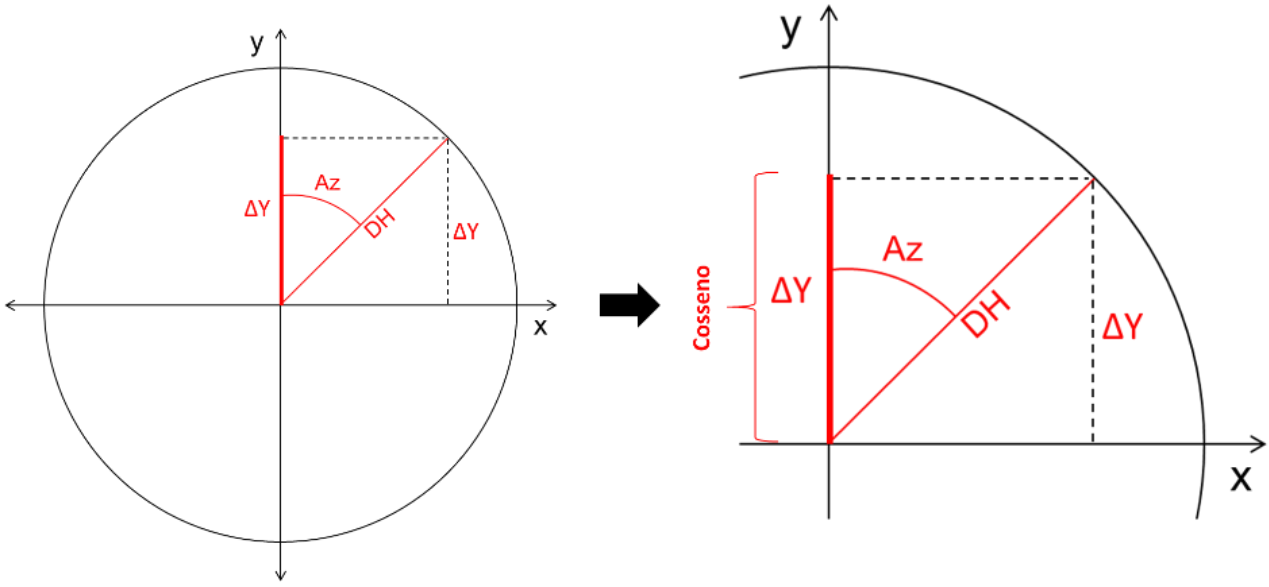


Figura 15 - Relação das coordenadas polares com as coordenadas retangulares para Y.

EXERCÍCIOS

Os exercícios referentes a revisão de Trigonometria e Geometria Analítica estão disponibilizados a seguir.

Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Engenharia de Biossistemas
Disciplina: LEB0340 – Topografia
Prof. Dr. Peterson Ricardo Fiorio

Lista de Exercícios 1 - Revisão

Nome: _____ nº. USP: _____ Turma: _____ Data: __ / __ / ___

Revisão de Trigonometria

1) Dois lados adjacentes de um retângulo têm 15,8 cm e 11,9 cm. Determine os ângulos que a diagonal do retângulo faz com ambos os lados.

2) Uma rampa uniforme sobe 10,5 km num trecho de 60,0 km de comprimento (distância inclinada). Determine o ângulo entre a rampa e a horizontal.

3) Em um triângulo retângulo, os lados que contêm o ângulo reto (catetos) têm 4,5 m e 5,8 m. Determine os outros ângulos e o comprimento da hipotenusa.

4) Em um triângulo de lados a, b e c:

4.1) Quando Â = 54°00'; B = 67°00' e a = 13,9 m, determine b e c.
4.2) Quando Â = 38°15'; B = 29°38' e b = 16,2 m, determine a e c.

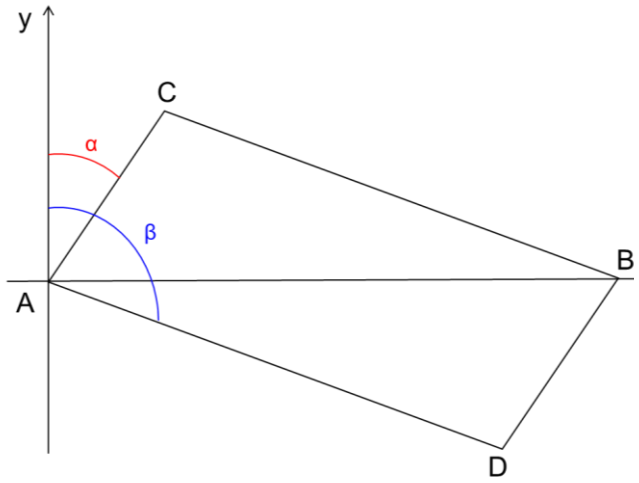
5) Determine os ângulos do triângulo cujos lados são: a = 8 m, b = 9 m e c= 12 m.

6) Em um triângulo: $\hat{A}$ = 75°12', b = 43 m e c = 35 m, determine $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

7) Determine a área de um triângulo quando a = 6,2 m, b = 7,8 m e $\hat{C}$ = 52°00'.

8) Determine a área de um triângulo cujos lados têm: 325 m; 256 m e 189 m.

9) Um terreno, em forma de paralelogramo, foi levantado conforme croqui a seguir:



Obteve-se os seguintes dados:

I. AB = 60 m

II. α = 60°30’15’’

III. β = 129°25’20’’

Determinar:

9.1) O perímetro do polígono.

9.2) A área do polígono ACBD, pelo método de Héron.

Respostas

Exercício	Item	Resultado	Exercício	Item	Resultado
1	Ângulo 1 =		6	Ângulo $\hat{B}$ =	
	Ângulo 2 =			Ângulo $\hat{C}$ =	
2	Ângulo =		7	Área =	
3	Ângulo 1 =		8	Área =	
	Ângulo 2 =		9	Perímetro =	
	Comprimento hipotenusa =			Área =	
4	b =				
	c =				
5	Ângulo $\hat{A}$ =				
	Ângulo $\hat{B}$ =				
	Ângulo $\hat{C}$ =				

Revisão de Geometria Analítica

1) Represente graficamente, no plano cartesiano, o polígono cujas coordenadas dos vértices são:

A (-3; 2)	D (5; 0)
B (1; 3)	E (2; -3)
C (3; 5)	F (0; -2)

Observações:
I. Unidade de medida linear = metro
II. Empregar escala 1:100

2) Calcular, pelo método das coordenadas (Gauss), a área do polígono a que se refere o exercício anterior.

3) Ainda com relação ao mesmo polígono, unindo-se por meio de uma linha os vértices A e D, qual o valor do ângulo agudo (α) formado entre AD e o eixo das abscissas? Qual o comprimento de AD?

4) As coordenadas polares dos vértices de um triângulo são:

A (4,243 m; 45°00’00’’)
B (7,616 m; 23°11’55’’)
C (5,000 m; 00°00’00’’)

Calcular as respectivas coordenadas retangulares (ou cartesianas).

Respostas

Exercício	Item	Resultado
2	Área =	
3	α =	
	$\overline{AD}$ =	
4	Coordenadas de A	
	Coordenadas de B	
	Coordenadas de C	

Representação gráfica do exercício 1: