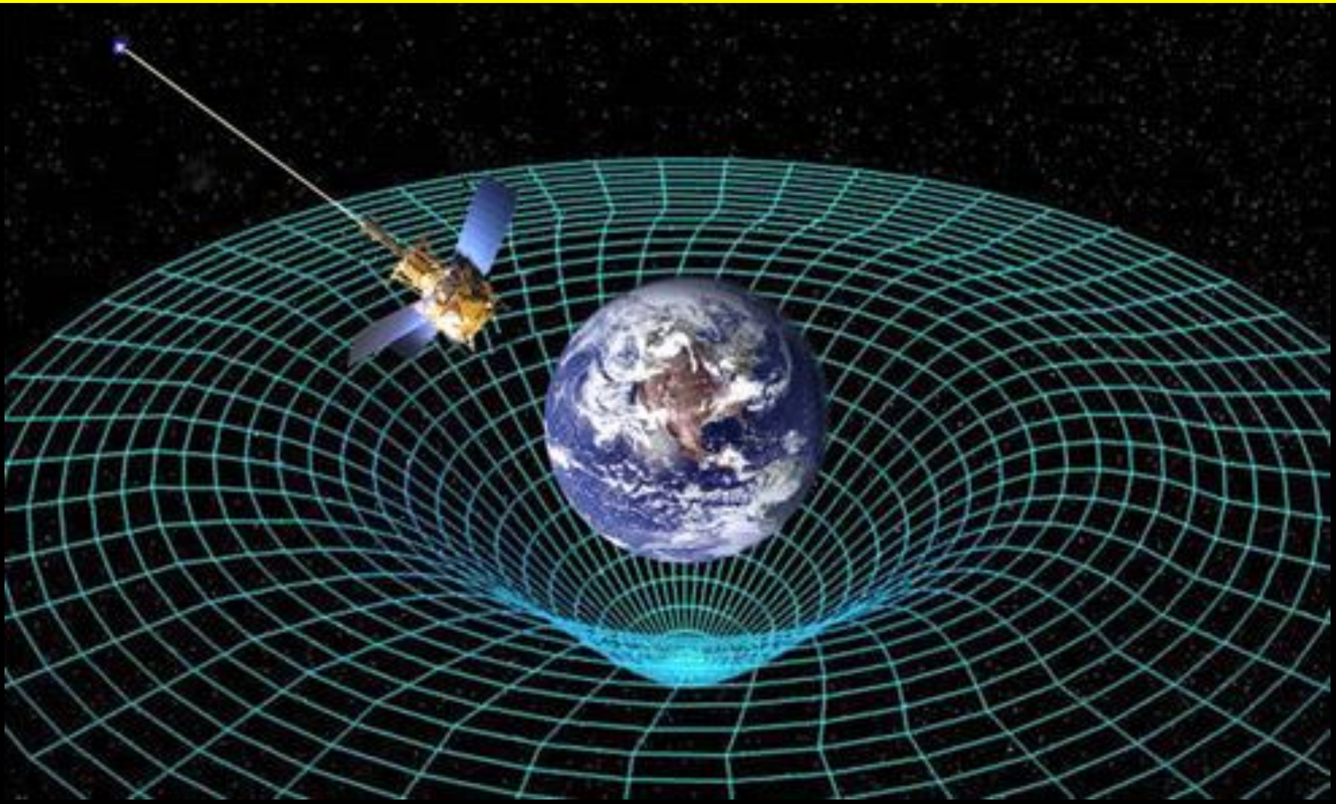
(Adaptado do curso AGA0215 da **Profa. Thais Idiart**)

COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

A GEOMETRIA DO ESPAÇO

Idéias da Teoria da Relatividade Geral!

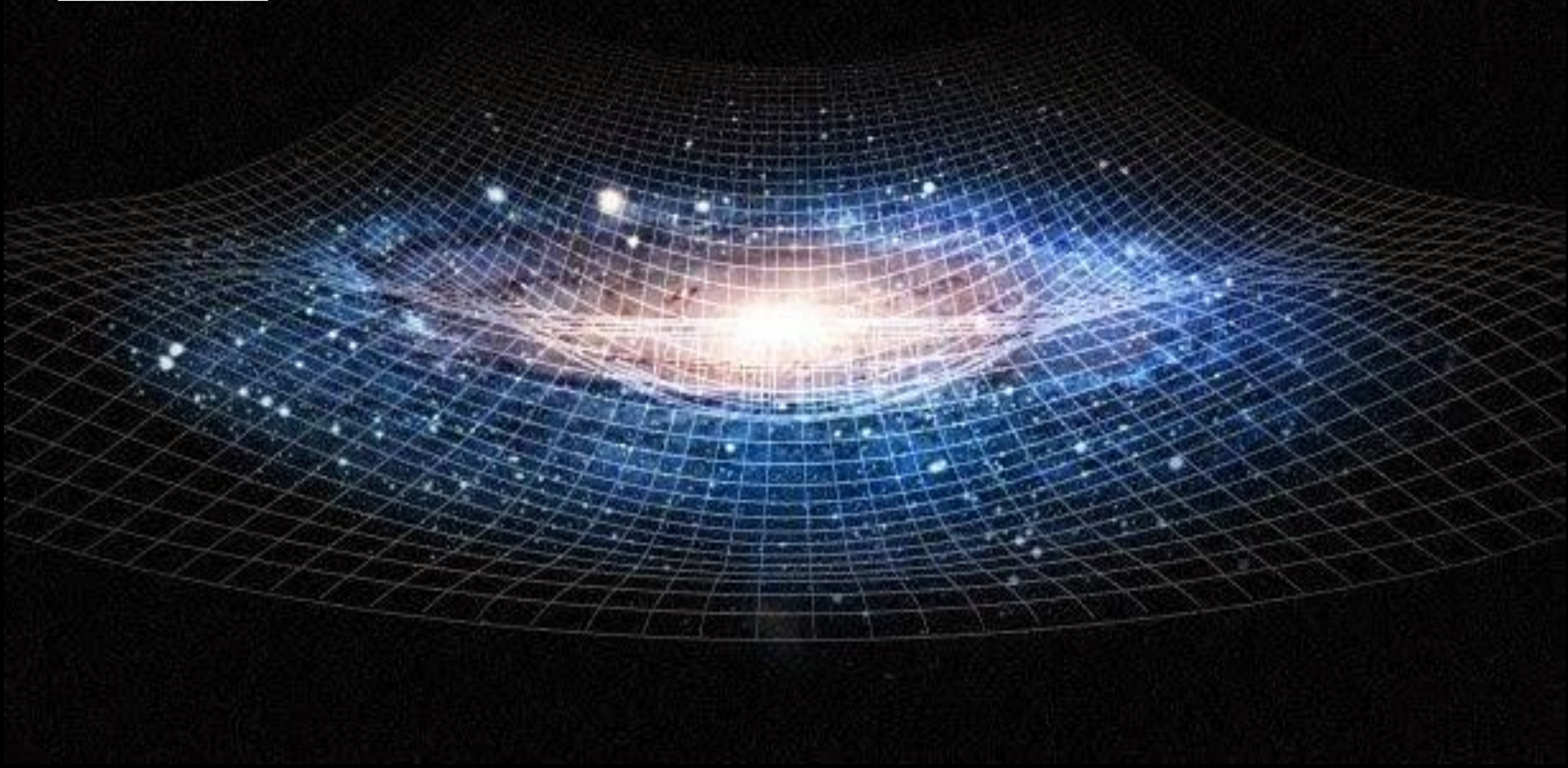
Não se define “intensidade da gravidade” e sim CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO



Deve-se pensar em termos de geometria do universo

A GEOMETRIA DO ESPAÇO

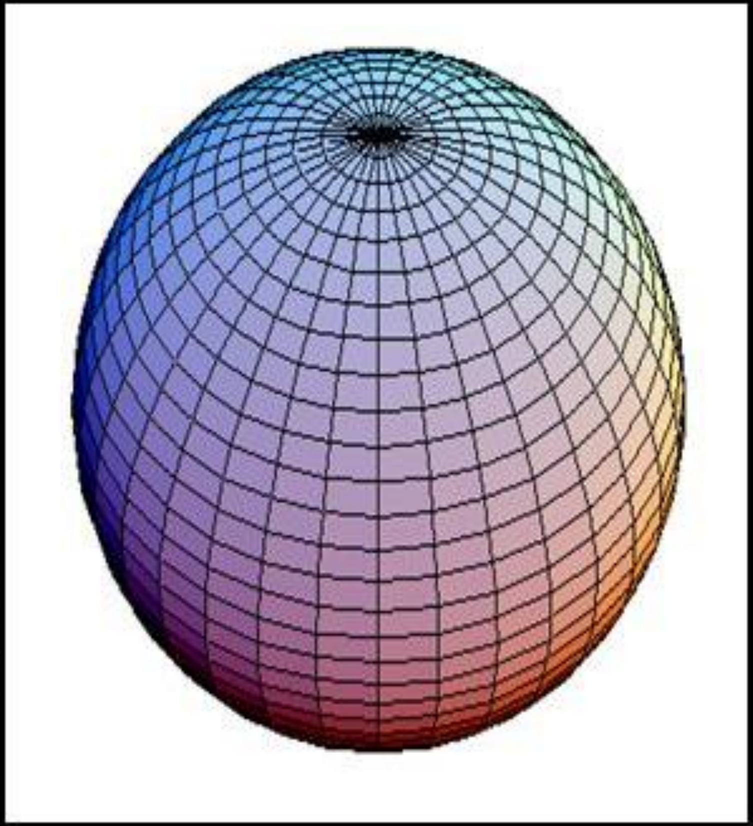
A CURVATURA ou GEOMETRIA do universo será determinada pela densidade total de matéria + energia



PRINCÍPIO COSMOLÓGICO
= universo isotrópico e homogêneo
⇨ a curvatura deverá ser constante em cada ponto do espaço.

Então pode-se supor 3 possibilidades para a geometria do universo

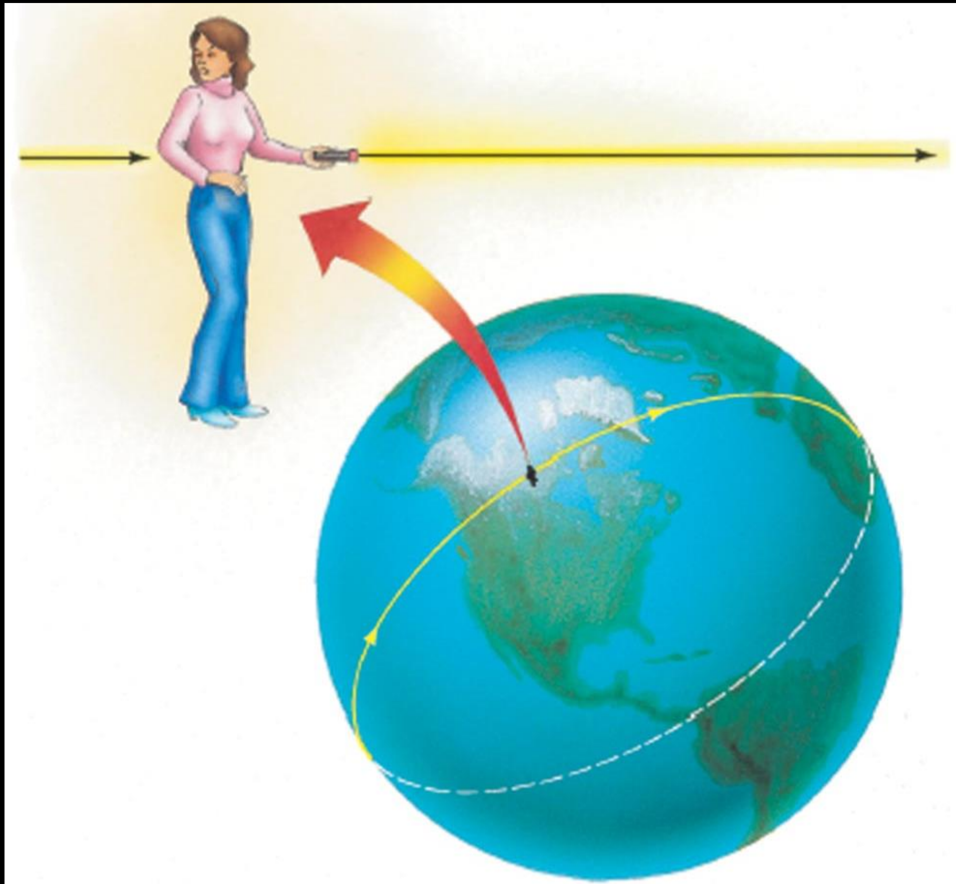
GEOMETRIA ESFÉRICA (RIEMANN)



O espaço será curvado de forma a se "dobrar sobre ele mesmo"
Universo finito em extensão mas sem "bordas".

GEOMETRIA ESFÉRICA (RIEMANN)

Andando-se em linha reta numa superfície esférica, volta-se ao ponto de partida



Universo fechado $\rho > \rho_c$: universo vai colapsar

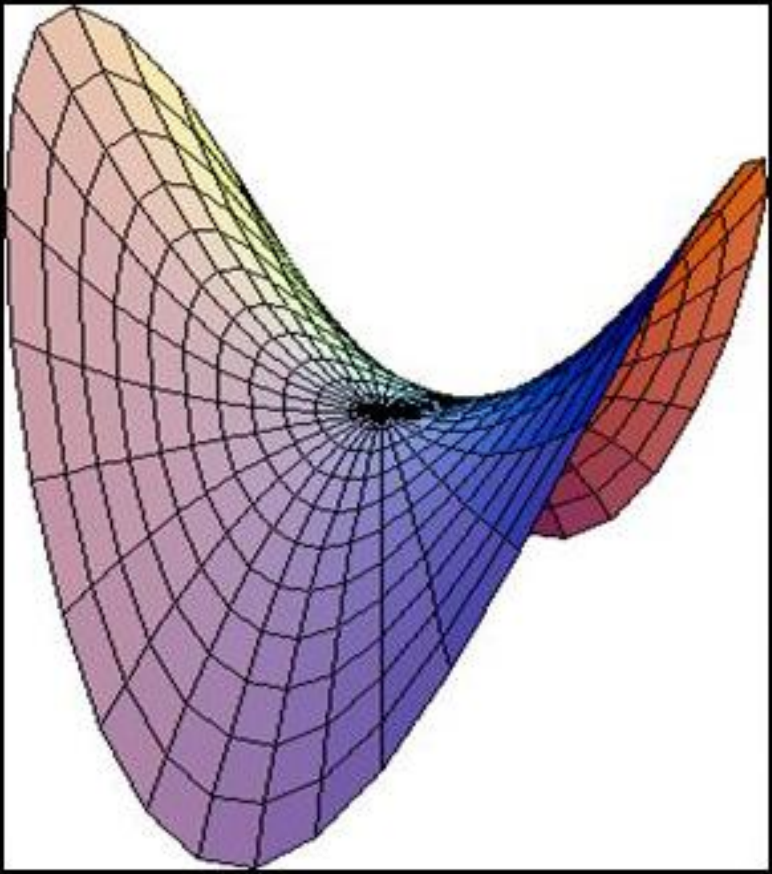
GEOMETRIA PLANA (EUCLIDIANA)

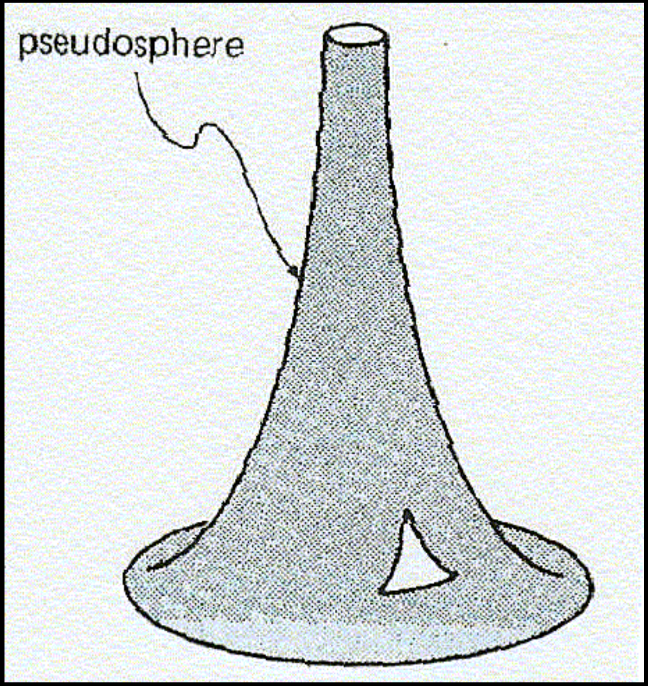
O espaço será plano em grandes escalas.
Universo infinito em extensão.

Universo marginalmente ligado $\rho = \rho_c$

em expansão perpétua.

GEOMETRIA HIPERBÓLICA (LOBACHEVSKY)





O espaço será curvado tal que se dobra "para baixo" numa direção e "para cima" na outra.
Universo infinito em extensão.

Universo aberto $\rho < \rho_c$
Expansão perpétua

GEOMETRIAS DE CURVATURA CONSTANTE

MENOR DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

- espaço euclidiano: linhas retas
- espaço esférico: arco de círculo máximo
- espaço hiperbólico: hipérbole

CONSTRUÇÃO DO MODELO COSMOLÓGICO RELATIVÍSTICO

Medidas de distâncias dentro de espaços de geometrias diferentes (curvaturas diferentes)

MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER (MRW)

↓

Definição mais completa: distância entre dois eventos num E-T de 4 dimensões definidos pelas coordenadas de tempo e espaço

Métrica de espaço-tempo

Suposições:

universo como um fluído isotrópico e homogêneo :

FLUÍDO COSMOLÓGICO

descrição da posição de um objeto no espaço:

COORDENADAS COMÓVEIS

Definição de MÉTRICA

Distância entre dois eventos A e B que ocorrem num tempo t

Todo corpo continua no estado de repouso ou de movimento retilíneo, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças a ele aplicadas.

Um caminho descrito por um corpo livre que obedece a 1ª lei de Newton de movimento pode ser descrita expressando suas coordenadas espaciais como função do tempo: x(t), y(t), z(t)

t absoluto

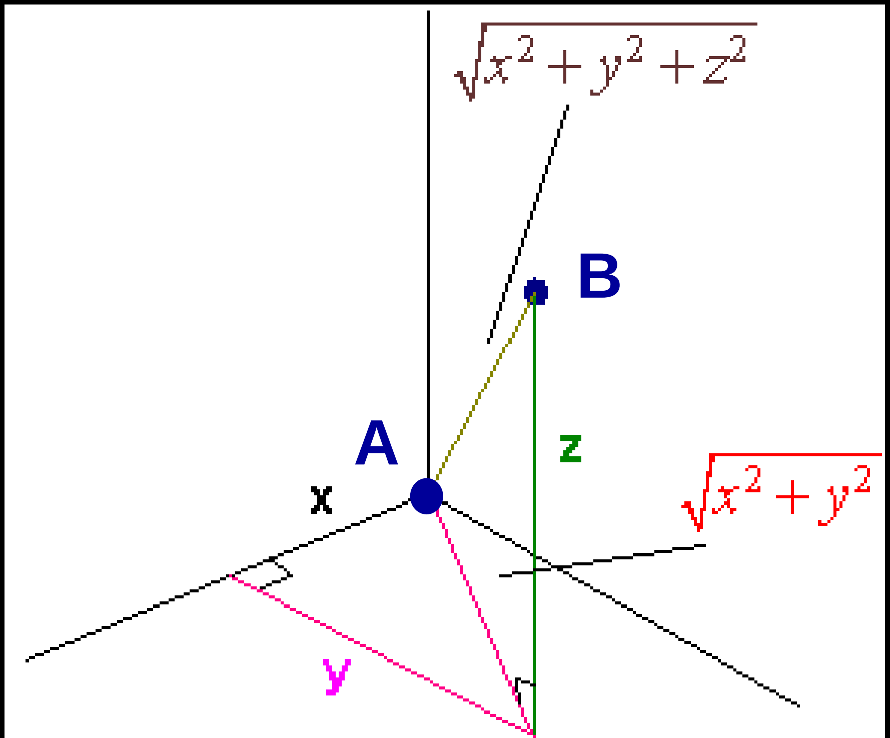
Este caminho representa a menor distância entre dois pontos

GEODÉSICA

Definição simples de MÉTRICA

Distância entre dois pontos A e B numa superfície

Ex. Uma superfície plana 3D, usando coordenadas cartesianas



$dx=x_B-x_A$
$dy=y_B-y_A$
$dz=z_B-z_A$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

Nota: ds é um invariante

independe do sistema de coordenadas

EM RELATIVIDADE GERAL

DIFERENTES OBSERVADORES PODEM MEDIR DIFERENTES DISTÂNCIAS E TEMPOS ENTRE EVENTOS QUE OCORREM EM A E B

DEVE-SE DEFINIR UM INVARIANTE ⇨ MESMO INTERVALO DE ESPAÇO-TEMPO ENTRE DIFERENTES OBSERVADORES

EX. GEOMETRIA PSEUDOEUCLIDIANA (ESPAÇO 3D PLANO) = ESPAÇO-TEMPO 4-D DE MINKOWSKI

definido pelas coordenadas espaciais x,y,z e pela **distância temporal ct**, onde x(τ) **, y(τ) , z(τ) , ct**($\boxed{\tau}$)

tempo próprio

t= tempo entre dois eventos

CASO RELATIVÍSTICO:
t é relativo e também é uma dimensão

Espaço plano 3-D dado por $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$

$$ds^2=c^2dt^2-|dl^2|$$

a distância espacial dl entre dois pontos num espaço 3-D é generalizada ao intervalo de espaço-tempo ds ENTRE DOIS EVENTOS

ds é um invariante = intervalo de espaço-tempo

MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER (MRW)

Para diferentes curvaturas ou geometrias possíveis

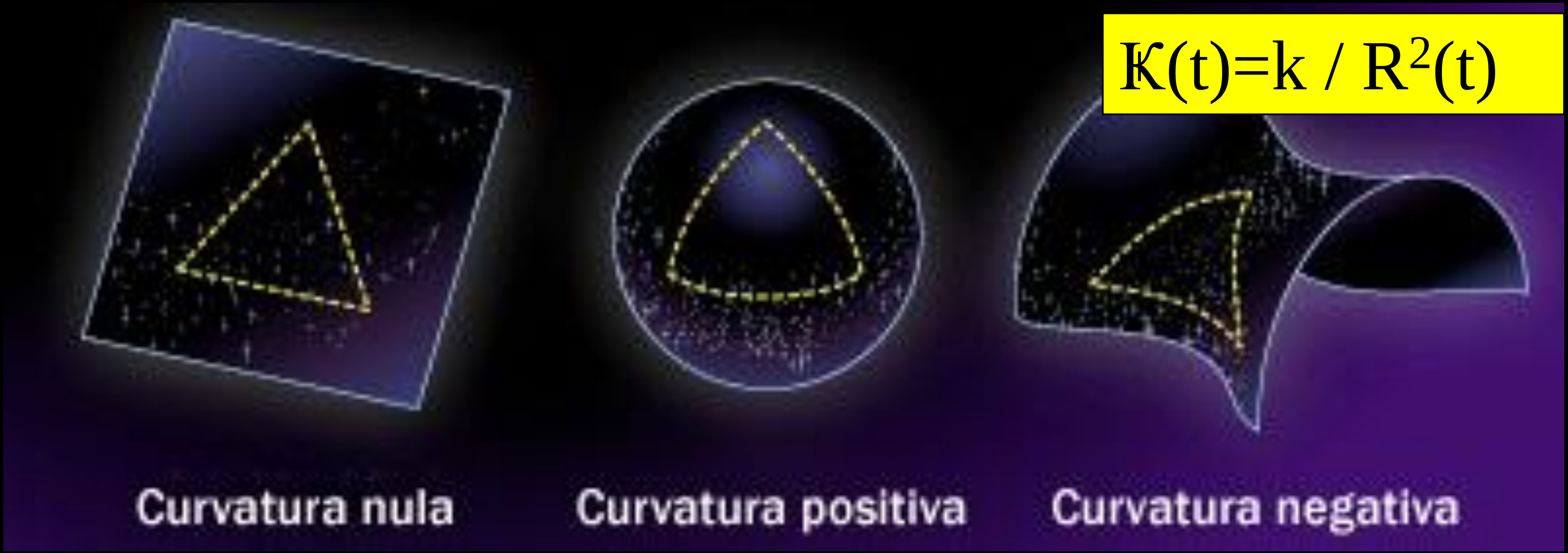
Definição matemática de curvatura do universo em termos do fator de escala:

$$Ꝁ(t) = k / R^2(t)$$

k =-1,0,+1

MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER (MRW)

$K(t)=k \,/\, R^2(t)$



$k=0$ $\qquad$ $k=+1$ $\qquad$ $k=-1$

A curvatura é constante para cada ponto no espaço num dado t, mas pode ser diferente para tempos diferentes.

MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER (MRW)

Métricas 4D para espaço de ӄ constante e tempo t, considerando coordenadas generalizadas (σ, θ, φ):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right\}$$

R= fator de escala

k= sinal da curvatura =+1,0,-1

σ = coordenada comóvel (função de R)

θ e φ = direção

Modelo cosmológico relativístico

Einstein: distribuição de MATÉRIA E ENERGIA relacionado com GEOMETRIA

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

G_{ij} = tensor de Einstein : descreve a geometria do universo
T_{ij} = tensor energia-momentum: descreve a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo

Distribuição de matéria+energia provoca uma curvatura no E-T que é descrita pelas equações de Einstein

O tensor energia-momemtum é a fonte da geometria, assim como a massa é a fonte do campo gravitacional na mecânica clássica.

Modelo cosmológico relativístico

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Na cosmologia T_{ij} vai depender de 2 funções: pressão $p(t)$ e densidade $\rho(t)$

p(t) = pressão exercida num fluído cosmológico devido à radiação + <u>movimento peculiar das galáxias</u>

pressão dinâmica

Modelo cosmológico relativístico

EQUAÇÕES DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE

Equações de Einstein da TRG + MRW = equações fundamentais que regem a dinâmica do universo

Einstein:distribuição de matéria e energia relacionado com geometria

MRW: distância no E-T em função do fator de escala

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right\}$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} p(t) = -\frac{kc^2}{R(t)^2} - \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} - 2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \Lambda$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho(t) = \frac{kc^2}{R(t)^2} + \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} - \frac{\Lambda}{3}$$

R= fator de escala

k = +1,0,-1

Constante cosmológica

Einstein e a constante cosmológica

Einstein supôs inicialmente um universo estático e de geometria esférica (k=+1). Λ foi originalmente introduzida nas equações para evitar que o universo colapsasse.

Quando Hubble demostrou a expansão do universo, Einstein removeu a constante cosmológica.

UNIVERSOS DE FRIEDMANN

Soluções supondo Λ=0

Calculando R(t) $\times$ t

partindo de:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R}$$

substituindo:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

α

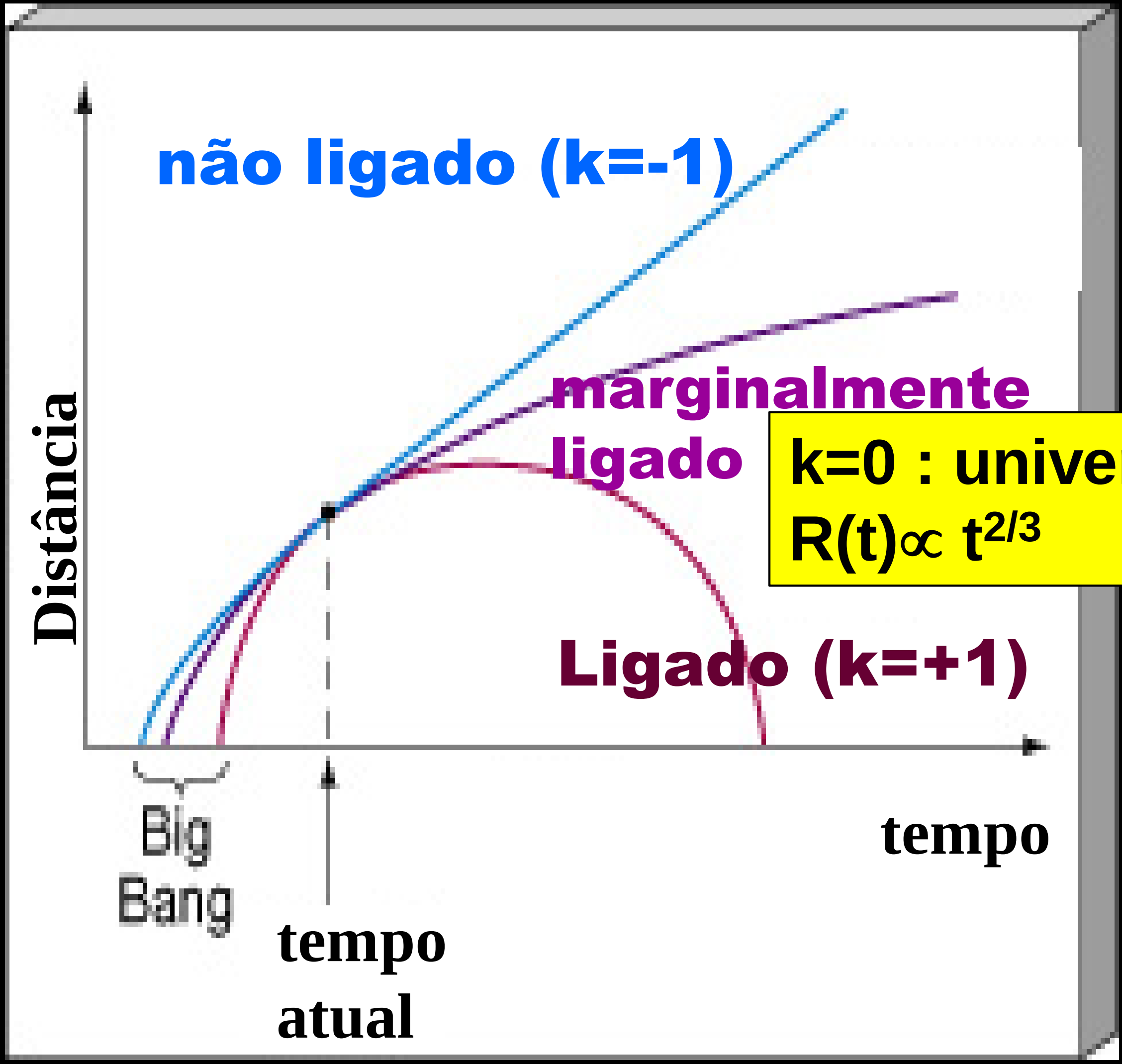
c.i. R(0)=0

$$\dot{R}^2 = \frac{\alpha}{R} - kc^2 \Rightarrow \int_0^t c\,dt = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha}{c^2} - kR}}\,dR$$

$$ct = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha}{c^2} - kR}}\,dR$$

variação do fator de escala com o tempo

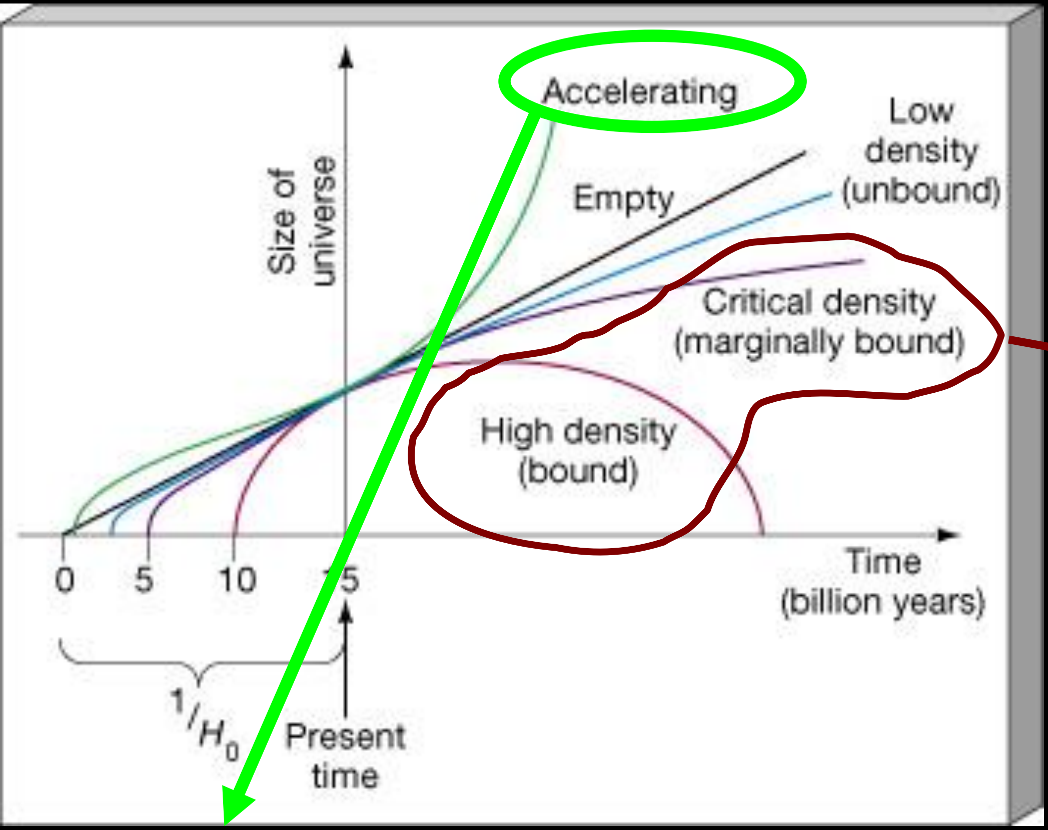
Considerando Λ=0, as equações de Friedmann prevêem os 2 futuros para a expansão do universo : expansão perpétua (k=0, -1) e contração (k=+1)



k=0 : universo de Einstein-de Sitter

$R(t) \propto t^{2/3}$

Dois modelos predizem idades menores do que as idades estimadas de estrelas mais velhas



Idades de aglomerados globulares ~ 10 a 12 Ganos

Universo não pode ser mais jovem do que a idade das estrelas mais velhas!!

Quasar : 13 Ganos

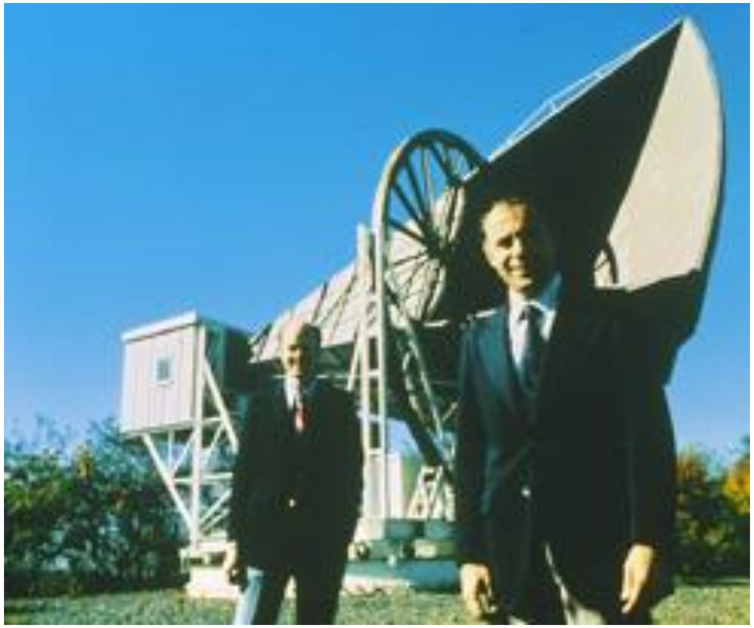
Modelo que mais concorda com as idades estimadas de estrelas velhas e as distâncias observadas pelas SNIa: universo acelerando a expansão (presença de força repulsiva = Λ positivo = energia escura). T ~14 Ganos

A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

É possível observar o universo a distâncias bem maiores do que o mais distante quasar detectado?!

Resposta: através de um experimento realizado por Arno Penzias e Robert Wilson (1964) ⇨ projeto para eliminar interferências em satélites de comunicação

prêmio nobel em física de 1978



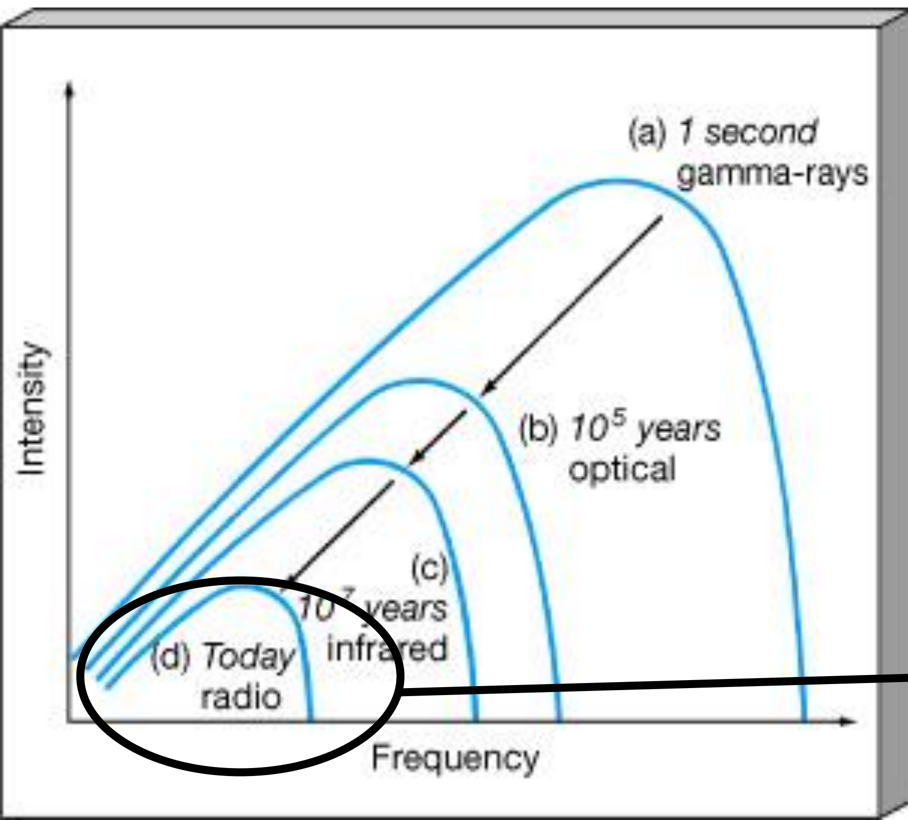
Detecção de um ruído fraco de baixa frequência, que vinha aparentemente de todas as direções e permanecia em qualquer época do ano.

Após todas as tentativas de explicação para este ruído de fundo, e sendo esta radiação aparentemente uniforme em todas as direções e invariante no tempo, ela foi associada mais tarde à radiação emitida pelo universo num passado bastante remoto.

RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Predições teóricas da radiação cósmica já tinham sido feitas em 1940

logo após o Big-Bang ⇨ universo preenchido com radiação térmica de alta energia ⇨ raios gama de λ muito curto



Esta radiação primordial deveria ser observada hoje em frequências mais baixas (λ maiores) devido ao redshift sofrido por esta radiação pela expansão do universo.

radiação hoje na faixa de microondas

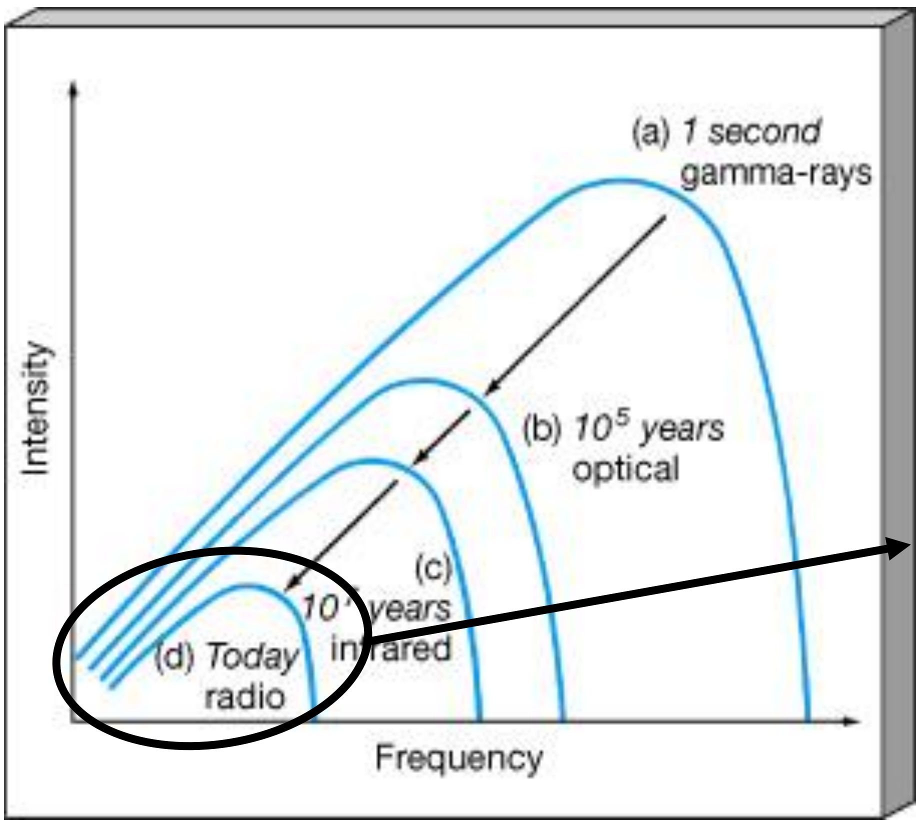
RADIAÇÃO E MATÉRIA NO UNIVERSO

Matéria no universo é constituída de :
- **átomos (matéria bariônica)**
- **Matéria escura (bariônica ou exótica)**

As principais fontes de radiação no universo são:
- **estrelas em galáxias**
- **radiação cósmica de fundo**

Qual destas fontes emite mais energia?

R: a radiação cósmica de fundo



Estrelas + galáxias são fontes mais intensas, mas ocupam somente uma pequena fração do volume total do universo

A radiação cósmica de fundo (RCF) é mais fraca, mas ocupa todo o volume do espaço

$$\mathbf{E_{total}(RCF) \sim 10 \times E_{\star}}$$

Fonte mais significativa de energia no universo = RCF

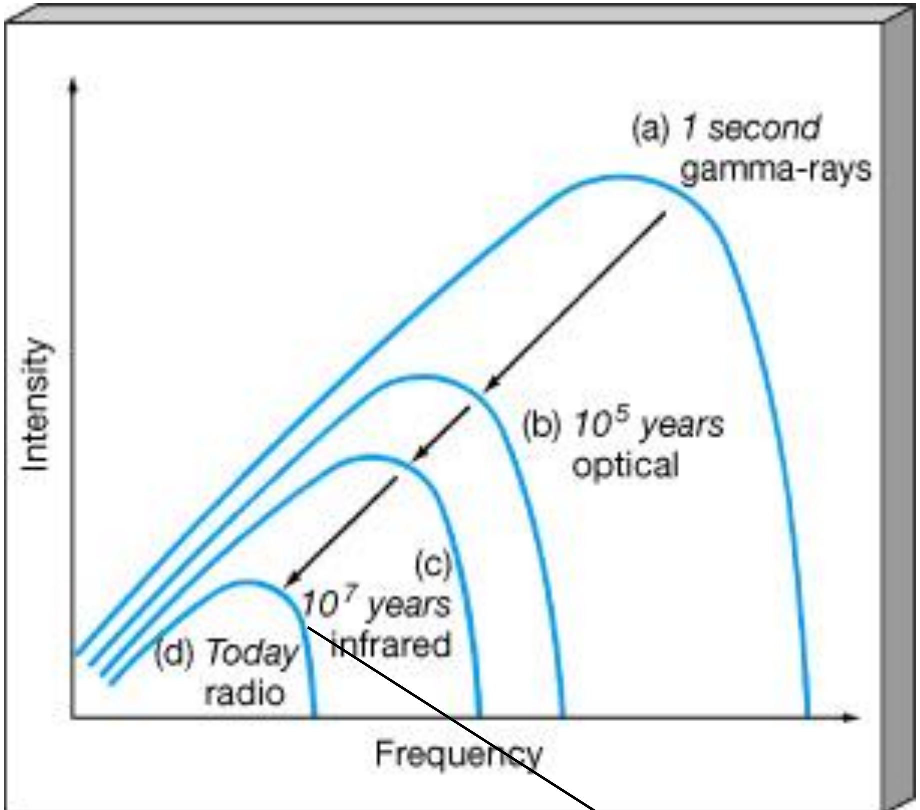
Qual a componente que domina atualmente o universo : matéria ou energia(radiação) ?

Como comparar as densidades de energia e matéria? ⇨ R: usando E = mc²

$$se\ \ E = mc^2 \Rightarrow \frac{E}{V} = \frac{m}{V}c^2 \Rightarrow \varepsilon_{rad} = \rho_{rad}c^2 \quad ⇨ \quad \boxed{\rho_{rad} = \frac{\varepsilon_{rad}}{c^2}}$$

densidade em massa de energia

$$\rho_{rad} = \frac{\varepsilon_{rad}}{c^2}$$



2,7 K

A densidade de radiação de um corpo negro (Stefan-Boltzmann):

$$\varepsilon_{rad} = aT^4$$

a = constante da radiação
T = temperatura do corpo negro

Levando em conta a temperatura da RCF, pode-se estimar ε_{rad} e então ρ_{rad} : $\rho_{rad} \sim 5\times10^{-31}$ kg/m^3

Levando em consideração a densidade observada de matéria luminosa+escura:

$$\rho_m \sim 3\times10^{-27}\ kg/m^3$$

Vê-se que:

$$\rho_m \sim 3\times10^{-27}\ kg/m^3 >> \rho_{rad} \sim 5\times10^{-31}\ kg/m_3$$

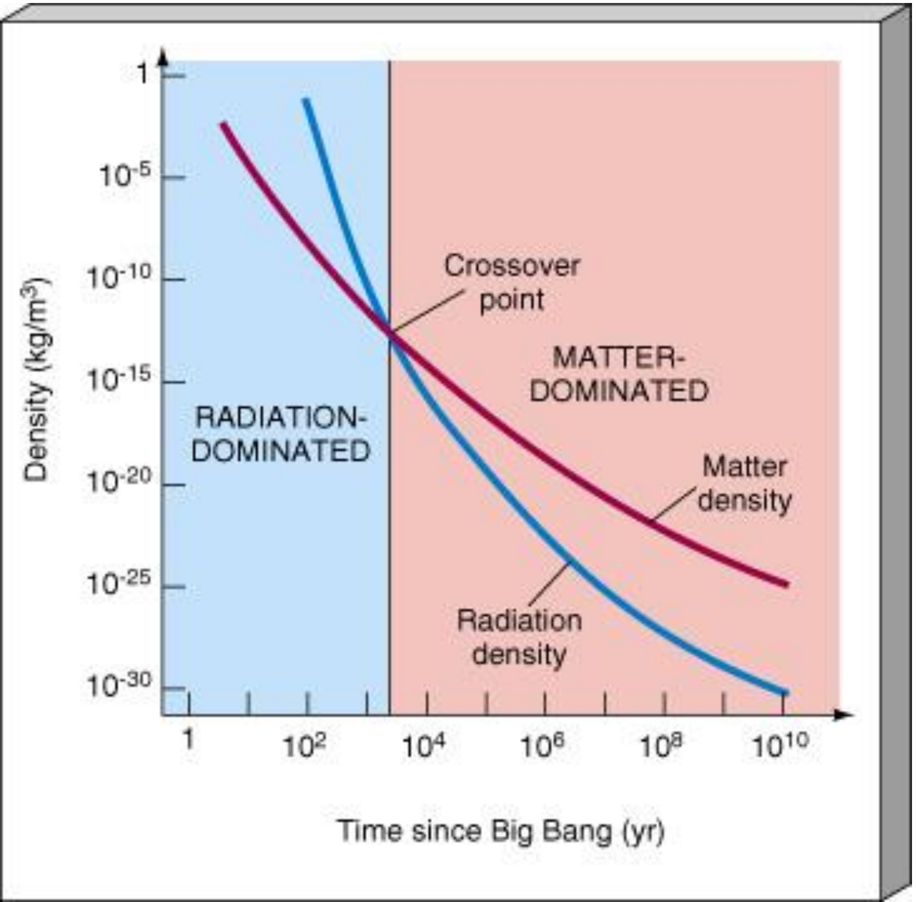
$$\Downarrow$$

$$\rho_m \sim 6000 \times \rho_{rad}$$

Atualmente vivemos em um universo em que a densidade de matéria é maior do que a densidade de radiação.

A densidade de matéria foi sempre maior do que a densidade de energia (radiação) no universo?

R: Não! De acordo com as equações de Friedmann, calculando-se a densidade de matéria e energia no passado (supondo o Big-Bang), teve uma época em que o universo foi dominado pela radiação.



Com a expansão do universo, tanto a densidade da matéria e de fótons diminuem (massa e energia por unidade de volume (R^3)).

No entanto os fótons também diminuem em energia por causa da expansão (redshift de λ) (energia diminui por R^4).

Logo ρ_{rad} cai mais rápido no tempo do que ρ_m.

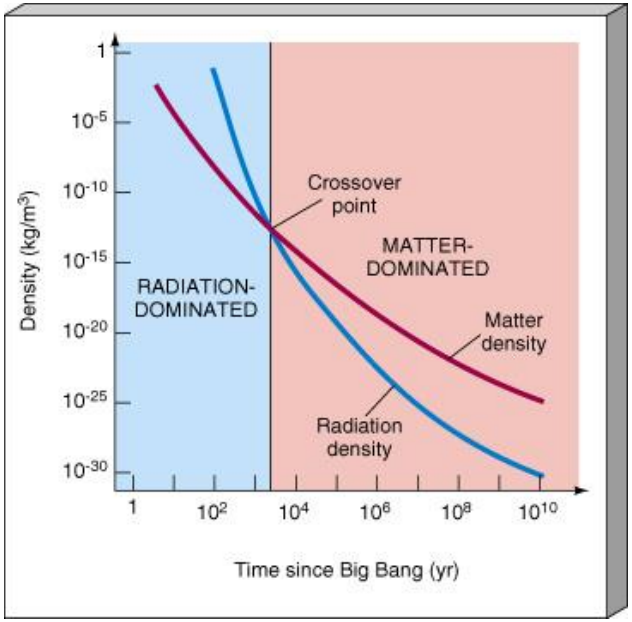
EVOLUÇÃO DO FATOR DE ESCALA PARA UM UNIVERSO DOMINADO PELA RADIAÇÃO:

Considerando: $$\frac{8\pi G}{3}\rho(t) = \frac{kc^2}{R(t)^2} + \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} - \frac{\Lambda}{3} \quad \textbf{(1)}$$

Universo de Friedmann Λ=0 e considerando e era radiativa: $\rho_{rad} >> \rho_m$, então:

$$\boxed{\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_{rad}R^2}{3} - kc^2}$$

Sabendo que:



$$\Rightarrow \rho_{rad} \propto R^{-4}$$

Considerando $$\rho_{rad} = \rho_{rad0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

$$\boxed{\dot{R}^2 = \frac{\alpha_{rad}}{R^2} - kc^2}$$

$$\alpha_{rad} = \frac{8\pi G \rho_{rad0} R_0^4}{3}$$

$$\boxed{\text{c.i. } R(0)=0}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{\alpha_{rad}}{R^2} - kc^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t c\,dt = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{rad}}{c^2} - kR^2}}\,dR$$

$$ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{rad}}{c^2} - kR^2}}\,dR$$

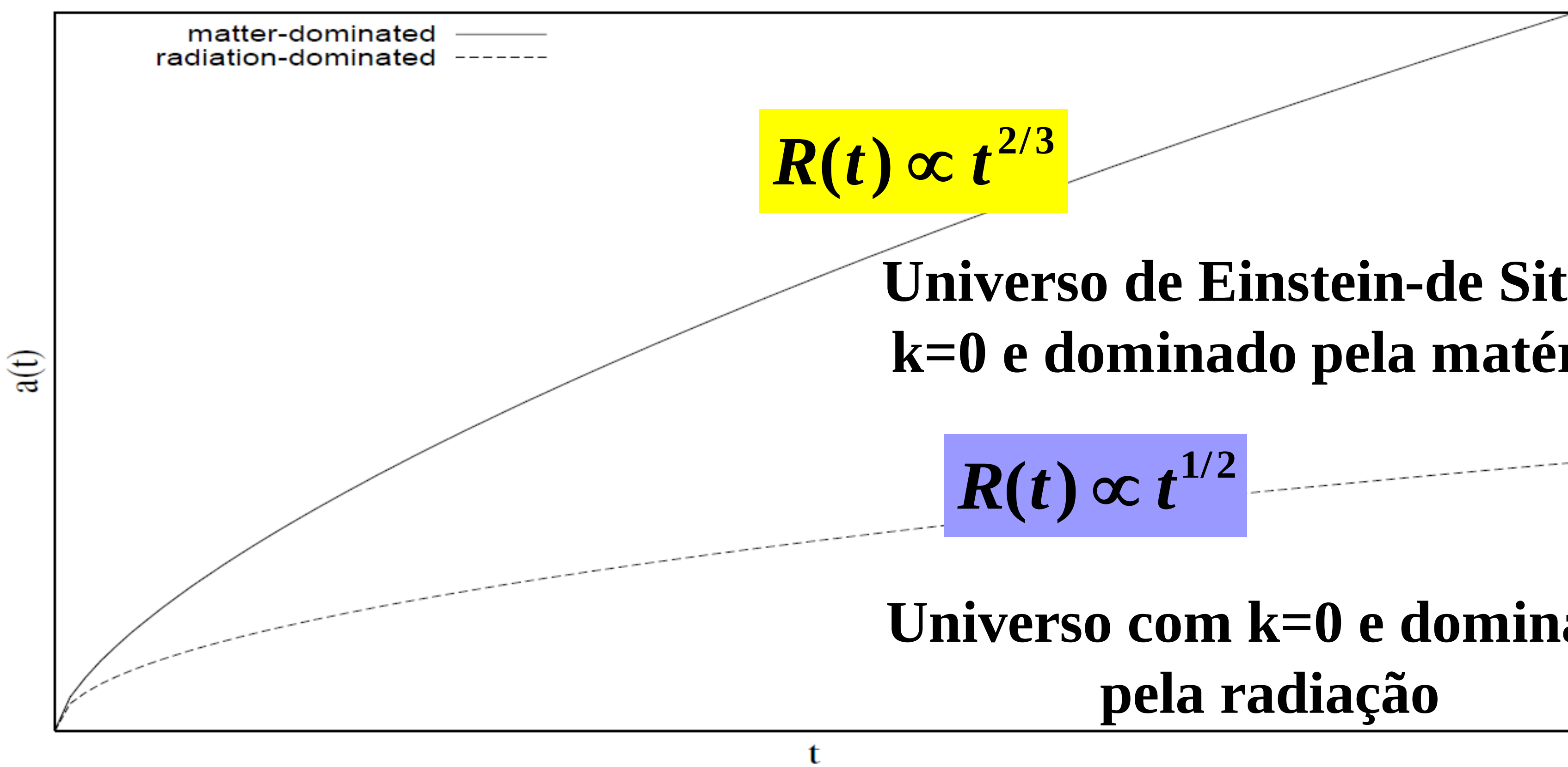
variação do fator de escala com o tempo

k=0

$$\int_0^R R\,dR = \int_0^t \sqrt{\alpha_{RAD}}\,dt$$

$$R(t) \propto t^{1/2}$$

Flat Friedmann Universe (k=0, q_0=1/2)



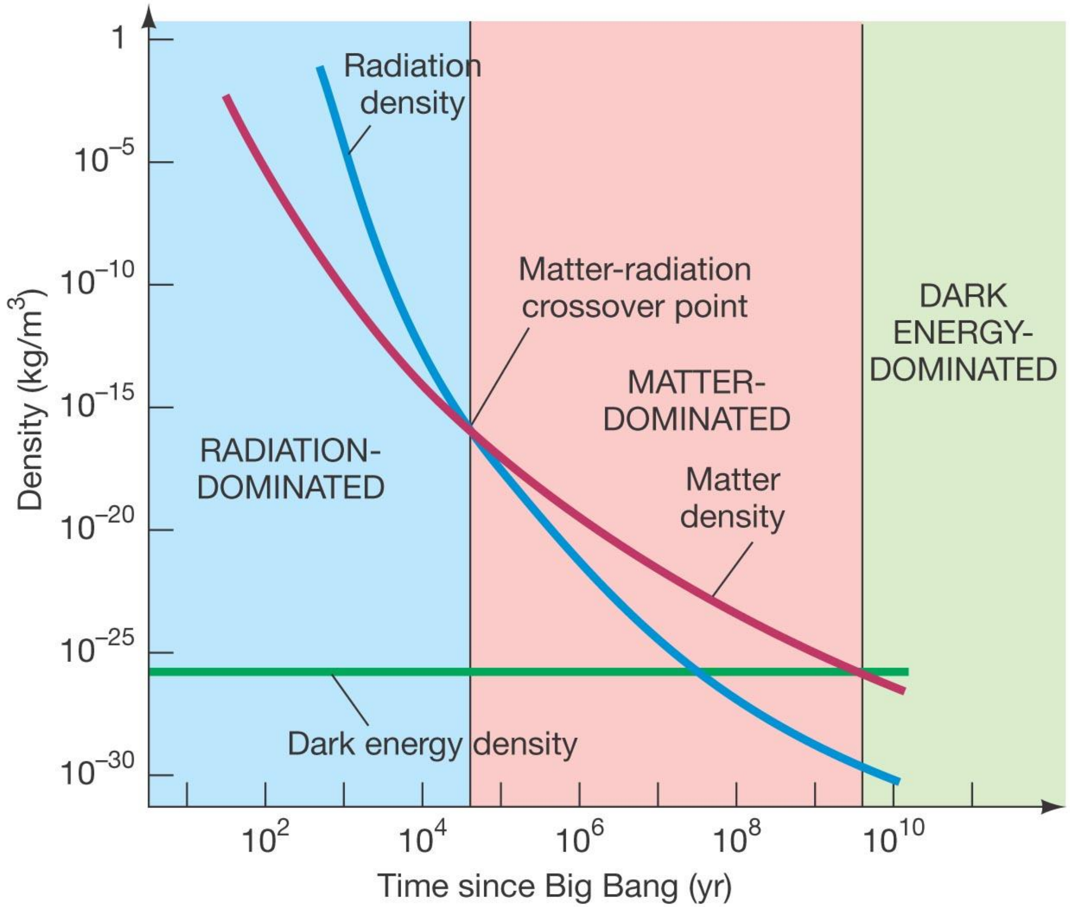
$$R(t) \propto t^{2/3}$$

Universo de Einstein-de Sitter
k=0 e dominado pela matéria

$$R(t) \propto t^{1/2}$$

Universo com k=0 e dominado pela radiação

E a energia escura ?



De acordo com as observações feitas pelas SNIa, energia escura é um fenômeno de grande-escala. Ela aumenta sua influência à medida que o universo expande (aumenta seu tamanho), então no começo do universo Λ não deveria ser importante... (será?!)

O holandês Willem de Sitter (1872-1934) demonstrou em 1917 que Λ permite um Universo em expansão mesmo se ele não contivesse qualquer matéria e, portanto, ela é também chamada de <u>ENERGIA DO VÁCUO</u>.

Completando...

- **O universo em maiores escalas ⇨ mistura aproximadamente homogênea de matéria (escura e bariônica) + radiação + energia escura**

Para H_o=71 km/s/Mpc $\Rightarrow \rho_C = 9{,}5\times10^{-27}$ kg/m^3

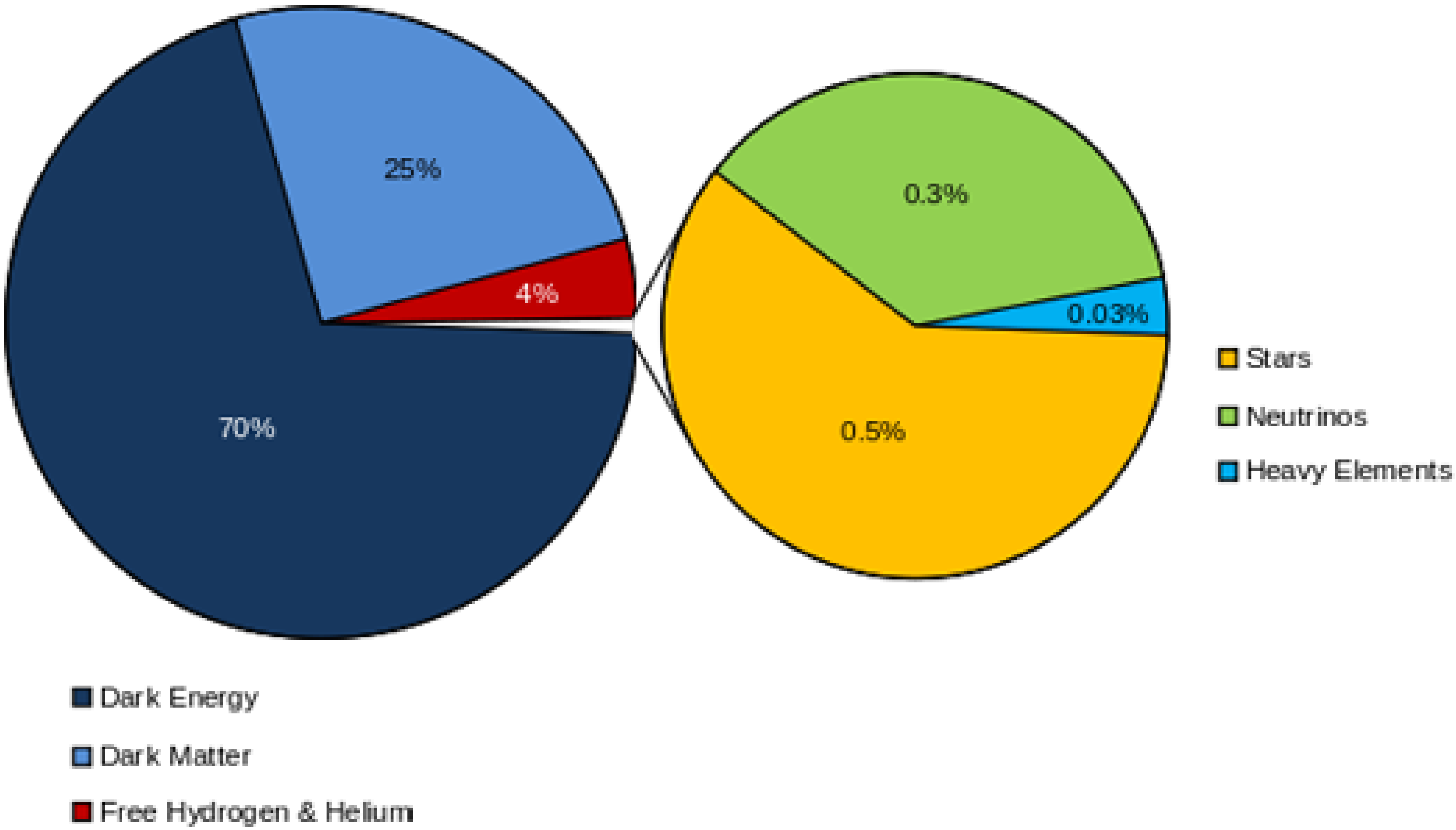
Resultados mostram que a densidade de matéria atual é ρ_m=0,3 $\times\ \rho_c \sim 2{,}9\times10^{-27}$ kg/m^3

+

Λ= existência de energia de caráter repulsivo
70% da massa-energia total existe na forma de dark energy $\Rightarrow \rho_D \sim 6{,}7\times10^{-27}$ kg/m^3 (resultados de SNIa)

⇩

Universo plano em expansão eterna
$\rho_{TOT} = \rho_M + \rho_D \sim \rho_c$ ⇨ $\Omega_0 \sim 1$


25%
4%
70%
0.3%
0.03%
0.5%
Stars
Neutrinos
Heavy Elements
Dark Energy
Dark Matter
Free Hydrogen & Helium